

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

11. Band, Heft 7      UND IHRE GRENZGEBIETE      S. 289—336

## Algebra und Zahlentheorie.

**Kapferer, Heinrich:** Eliminanten bei Gleichungssystemen zweier Variablen. J. reine angew. Math. **173**, 79—90 (1935).

Zwei zweifach-homogene Gleichungen  $F(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0$  und  $G(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0$  haben endlich viele Lösungen  $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}; \beta_{1i}, \beta_{2i})$  mit bestimmten Multiplizitäten  $\mu_i$ , deren Summe sich durch die Gradzahlen der Formen  $F$  und  $G$  ausdrücken läßt:

$$\sum \mu_i = m_x n_y + m_y n_x.$$

Es wird gezeigt, wie man diese Multiplizitäten elementar definieren und berechnen kann. Wenn  $B(x)$  die Resultante von  $F$  und  $G$  nach  $y$  und  $B(y)$  die Resultante nach  $x$  ist, so ist

$$B(x) = \prod_i (\beta_{2i} y_1 - \beta_{1i} y_2)^{\mu_i}, \quad B(y) = \prod_i (\alpha_{2i} x_1 - \alpha_{1i} x_2)^{\mu_i}$$

mit denselben Exponenten  $\mu_i$ . Geht man durch  $x_2 = y_2 = 1$  zu inhomogenen Polynomen über, so bleiben die Resultanten dieselben, aber einige Nullstellen können verlorengehen, nämlich genau dann, wenn die Koeffizienten von  $y_1^{m_y}$  und  $y_1^{n_y}$  in  $F$  und  $G$  einen Faktor  $a(x)$  gemeinsam haben oder wenn die Koeffizienten von  $x_1^{m_x}$  und  $x_1^{n_x}$  einen Faktor  $b(y)$  gemeinsam haben. Diese inhomogenen Resultanten heißen nach Netto Eliminanten. van der Waerden (Leipzig).

**Turnbull, H. W.:** On the equivalence of pencils of Hermitian forms. Proc. London Math. Soc., II. s. **39**, 232—248 (1935).

Eine Schar von Hermiteschen Formen  $r\Phi - s\Psi = r \sum \bar{x}_i a_{ij} x_j - s \sum \bar{x}_i b_{ij} x_j$  ( $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ ,  $b_{ji} = \bar{b}_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ) mit komplexen Koeffizienten und reellen  $r$  und  $s$  kann, wenn  $|a_{ij}| \neq 0$  ist, durch eine lineare Variablensubstitution  $x_i^* = \sum h_{ij} x_j$ ,  $\bar{x}_i^* = \sum \bar{h}_{ij} \bar{x}_j$ ,  $|h_{ij}| \neq 0$  in eine kanonische Gestalt übergeführt werden [vgl. Bromwich, Proc. London Math. Soc., I. s. **30**, 321 (1900)]. Diese setzt sich aus Summanden der Form

$$\varepsilon_\sigma \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{e_\sigma} (r - s c_\sigma) x_{\sigma,i} \bar{x}_{\sigma, e_\sigma + 1 - i} - \sum_{i=1}^{e_\sigma - 1} s x_{\sigma,i} \bar{x}_{\sigma, e_\sigma - i} \right\}$$

für reelle Wurzeln  $c_\sigma$  von  $|r a_{ij} - b_{ij}| = 0$  und ähnlichen Summen für komplexe Wurzeln  $a_\sigma$  mit lauter verschiedenen Variablenreihen  $x_{\sigma,i}$  zusammen. Darin sind die  $c_\sigma$  und  $a_\sigma$  und die  $e_\sigma$  aus den Elementarteilern der Matrix  $(r a_{ij} - b_{ij})$  zu entnehmen. Die  $\varepsilon_\sigma = \pm 1$  treten nur bei den  $c_\sigma$  auf. Man berechnet die  $\varepsilon_\sigma$  aus den Trägheitsindizes der Koeffizienten  $P_\mu$  der negativen Potenzen von  $r - c_\sigma$  in der Entwicklung der Matrix  $(r a_{ij} - b_{ij})^{-1} = \sum_{\mu=1}^{e_y} P_\mu \cdot (r - c_\sigma)^{-\mu} + P_0(r - c_\sigma)$  um  $r = c_\sigma$  mit der Potenzreihe  $P_0(r - c_\sigma)$  und findet so ihre Invarianz. Daher sind zwei nicht ausgeartete Scharen dann und nur dann äquivalent, wenn die Elementarteiler und diese  $\varepsilon_\sigma$  übereinstimmen. Wenn  $|a_{ij}| = 0$ , jedoch  $|r a_{ij} - s b_{ij}| \neq 0$ , so wähle man in der Schar eine neue Basis. — Ist  $|r a_{ij} - s b_{ij}| \equiv 0$ , so muß man zunächst eindeutig bestimmte Formen

$$\sum_{i=1}^m \{ r(x_i \bar{x}_{m+1+i} + \bar{x}_i x_{m+1+i}) + s(x_{i+1} \bar{x}_{m+1+i} + \bar{x}_{i+1} x_{m+1+i}) \}$$

abspalten und kommt dann auf eine nichtsinguläre Form  $F_0$  vom Rang  $R$ . Mit Hilfe der Begleitform, die als Koeffizienten die  $(R - 1 + \sum_y 2m_y)$ -reihigen Unterdeterminanten hat, ergibt sich für die Invarianten  $\varepsilon_\sigma$  von  $F_0$  die Unabhängigkeit von der



Art der vorgenommenen Abspaltungen. Man hat also für die ausgeartete Form die Invarianten  $c_\sigma$ ,  $a_\sigma$ ,  $e_\sigma$  und  $\varepsilon_\sigma$  von  $F_0$  und die Zahlen  $m_\nu$ , deren Anzahl  $n$  vermindert um den Rang der Formenschar ist. Walther Landherr (Hamburg).

**Mori, Shinziro:** Über eine neue Definition der Primärkomponenten eines Ideals. J. Sci. Hiroshima Univ. A 4, 161—169 (1934).

$\mathfrak{R}$  sei ein kommutativer Ring. Das Ideal  $q \subset \mathfrak{R}$  soll ein zu dem Primideal  $p$  gehöriges Primärideal heißen, wenn  $q \subset p$  und jedes Element aus  $p$  nilpotent in bezug auf  $q$  ist. Unter einem höchsten Primideal eines Ideals  $a$  wird ein Primideal  $p$  verstanden, wenn  $a \subset p$  und zwischen  $a$  und  $p$  kein weiteres Primideal liegt. Die Primärideale, die bei  $a = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ , wo die  $q_i$  die zu den verschiedenen höchsten Primidealen von  $a$  gehörigen Primärideale sind, auftreten, heißen Primärkomponenten von  $a$ . Es ergibt sich, daß für ein  $a$  die angegebene Darstellung existiert, wenn es als Durchschnitt von endlich vielen Noetherschen Primäridealen darstellbar ist. Es werden dann notwendige und hinreichende Bedingungen für die Darstellung eines Halbprimideals als Durchschnitt von endlich vielen höchsten Primidealen angegeben. Nach Aufstellung eines Kriteriums für die Darstellung eines Ideals als Durchschnitt von endlich vielen größten Noetherschen Primäridealen wird ein Ideal gezeigt, das als Durchschnitt der endlich vielen Primärkomponenten im neuen Sinne, nicht aber im Sinne von E. Noether darstellbar ist. Bruno Schoeneberg (Hamburg).

**Mori, Shinziro:** Zur Zerlegung der Ideale in abzählbaren Ringen. J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 7—12 (1934).

Verf. ersetzt die Krullsche Bedingung für die Darstellung eines Ideals aus einem kommutativen Ring als Durchschnitt endlich vieler Primärideale (Über einen Hauptsatz aus der allgemeinen Idealtheorie. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1929) durch eine schärfere für abzählbare Ringe. Ein Ring  $\mathfrak{R}$  heißt abzählbar, wenn sich für alle Ideale  $a \subset \mathfrak{R}$  jedes Element  $\alpha \subset a$  darstellen läßt in der Form  $\alpha = \sum (\alpha_i + r_i) \omega_i$ , wo  $\alpha_i \subset \mathfrak{R}$ ,  $r_i$  ganz rational und die  $\omega_i$  abzählbar viele Elemente aus  $a$  sind. In solchen Ringen ist jedes Ideal dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, wenn von einer gewissen Stelle an  $r = a : (r^m) = a : (r^{m+1}) = \dots$  ist, wobei  $a$  ein beliebiges Ideal und  $r$  ein beliebiges Element aus  $\mathfrak{R}$  bedeutet, und wenn die Anzahl der verschiedenen Idealquotienten  $r$  für ein Ideal  $a$  endlich ist.

Bruno Schoeneberg (Hamburg).

**Vandiver, H. S.:** On the foundations of a constructive theory of discrete commutative algebra. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 579—584 (1934).

**Vandiver, H. S.:** On the foundations of a constructive theory of discrete commutative algebra. II. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 162—165 (1935).

Es wird ein Programm für einen Aufbau der Algebra entwickelt, bei dem einerseits an Stelle der Grundbegriffe, wie Gruppe, Ring, Körper, auch allgemeinere Bildungen betrachtet werden, zu denen man durch Fallenlassen gewisser Axiome geführt wird. Andererseits will sich der Verf. auf rein konstruktive Methoden beschränken. Er erläutert hier seine Ideen an einigen Beispielen; die genaue Durchführung will er in späteren Arbeiten geben. R. Brauer (Princeton).

**Albert, A. Adrian:** On cyclic fields. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 454—462 (1935).

Es handelt sich um die Konstruktion zyklischer Körper  $Z$  vom Grade  $p^e$  (Primzahl) über einem Körper  $K$  mit von  $p$  verschiedener Charakteristik durch schrittweise Erweiterung  $p$ -ten Grades. Zunächst enthalte  $K$  die  $p$ -ten Einheitswurzeln. Dann kann ein  $Z$  aus seinem Teilkörper  $Y$   $p^{e-1}$ -ten Grades durch Adjunktion einer Größe  $z$  mit  $z^p = a$  in  $Y$  gewonnen werden. Ist  $S$  ein erzeugender Automorphismus von  $Y/K$ , so wird  $a^{S^{-1}} = \beta^p$ ,  $\beta$  in  $Y$  und  $N_{Y/K}(\beta) = \zeta$  primitive  $p$ -te Einheitswurzel.  $S$  kann auf  $Z$  ausgedehnt werden durch  $z^S = \beta z$ . Die Existenz einer Größe  $\beta$  in  $Y$  mit  $N_{Y/K}(\beta) = \zeta$  ist umgekehrt auch hinreichend dafür, daß sich  $Y$  in ein über  $K$  zyklisches  $Z$  vom Grade  $p^e$  einbetten läßt. Nach einem Hilbertschen Satze wird wegen  $N_{Y/K}(\beta^p) = 1$   $\beta^p = a^{S^{-1}}$ ,



$a$  aus  $Y$ ; alle  $Z$  werden durch  $Z = Y(\sqrt[p]{a})$  für ein solches  $\beta$  gegeben. Enthält der Körper  $F$  die  $p$ -ten Einheitswurzeln nicht, so können die zyklischen Erweiterungen  $Z/F$  vom Grade  $p^e$  auf zyklische Erweiterungen  $p^e$ -ten Grades  $Z_0 = Z(\zeta)$  von  $K = F(\zeta)$  zurückgeführt werden. Unter Benutzung von Resultaten der Arbeit des Verf: On normal Kummer fields over a non-modular field [Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 885 bis 892 (1934); dies. Zbl. **10**, 149] wird untersucht, welche speziellen Bedingungen die im Körper  $Y_0 = Y(\zeta)$  vom Grade  $p^{e-1}$  gelegenen Größen  $\beta$  erfüllen müssen, damit die durch sie definierten Körper  $Z_0$  zyklisch über  $F$  sind, also zyklische Erweiterungen  $p^e$ -ten Grades  $Z$  von  $F$  definieren. Der vorangeschickte Beweis des Hilbertschen Normensatzes ist schon von E. Noether angegeben worden: Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper [Math. Ann. **108**, 411—419 (1933); dies. Zbl. **7**, 295].

Deuring (Leipzig).

**Witt, Ernst: Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper.** J. reine angew. Math. **173**, 43—51 (1935).

Es handelt sich um den Existenzsatz der Klassenkörpertheorie für einen algebraischen Funktionenkörper  $k$  mit endlichem Konstantenkörper als Grundkörper. Verf. benutzt die Gelegenheit, um zuvor auf eine Reihe von Punkten einzugehen: Allgemeine Bemerkungen zum Aufbau der Klassenkörpertheorie als Theorie der abelschen Körper. Aus dem analytischen Verhalten der  $L$ -Funktionen und der Theorie der einfachen Algebren folgt als zentrale Tatsache der ganzen Theorie direkt das Artinsche Reziprozitätsgesetz und — wie Verf. hier beiläufig bemerkt — auch der Führer-Verzweigungssatz. Die früher an die Spitze gestellte Takagische Klassenkörperdefinition hat dann nur noch die Bedeutung eines handlichen Kriteriums für abelsche Körper, wie man es für den Beweis des Existenzsatzes benötigt. Daß jeder abelsche Körper Klassenkörper ist, ist auf Grund des Artinschen Reziprozitätsgesetzes klar; umgekehrt liefern die analytischen Methoden jedenfalls, daß jeder Klassenkörper galoissch ist und eine Hamiltonsche Gruppe hat; durch eine Zusatzbetrachtung arithmetischer Art kann man aber sogar zeigen, daß er abelsch ist. — Sätze über Faktoren- und Summandensysteme in galoisschen Körpern  $K$  über beliebigen Grundkörpern  $k$ . Einfacher expliziter Beweis des bekannten multiplikativen Satzes: Aus  $A_S A_T^S = A_{ST}$  in  $K$  folgt die Existenz eines  $B$  in  $K$  mit  $A_S = B^{1-S}$ . Analoger Beweis des additiven Analogons: Aus  $A_S + S A_T = A_{ST}$  in  $K$  folgt die Existenz eines  $B$  in  $K$  mit  $A_S = (1-S)B$ . Anders als im multiplikativen Falle gilt im additiven Falle: Jedes assoziative Summandensystem  $A_{S,T}$  in  $K$  zerfällt, d. h.  $A_{S,T} = B_S + S B_T - B_{ST}$ , mit leicht explizit angebbaren  $B_S$  in  $K$ . — Einfache Neubegründung der algebraischen Theorie der Kummerschen Körper, d. h. der abelschen Körper  $K$  vom Exponenten  $n$  über einem die  $n$ -ten Einheitswurzeln enthaltenden Grundkörper  $k$ , dessen Charakteristik nicht in  $n$  aufgeht. Der Hauptsatz, daß diese Körper vermöge  $K = k(\sqrt[n]{\alpha})$  umkehrbar eindeutig den Zahlgruppen  $\alpha/k^{**}$  entsprechen und dabei die galoissche Gruppe  $\mathfrak{G}$  von  $K/k$  zur Gruppe  $\alpha/k^{**}$  isomorph ist, wird durch Studium des Ausdrucks  $A^{1-S}$  ( $S$  in  $\mathfrak{G}$ ,  $A$  in  $K$ ,  $A^n = \alpha$  in  $k$ ) einerseits bei festem  $S$  als Charakter der Gruppe  $A/k^*$ , andererseits bei festem  $A$  als Charakter der Gruppe  $\mathfrak{G}$  wesentlich vereinfacht und durchsichtiger als bisher gestaltet. — Theorie der abelschen Körper vom Exponenten  $p$  über einem Grundkörper  $k$  der Charakteristik  $p$ . Diese Theorie wird durch Bildung des additiven Analogons der eben geschilderten entwickelt:  $A^p - A = \alpha$  statt  $A^n = \alpha$ ,  $(1-S)A$  statt  $A^{1-S}$ . — Lokale arithmetische Theorie der zyklischen algebraischen Funktionenkörper  $k$  mit vollkommenem Konstantenkörper. In Verallgemeinerung eines Resultats von H. L. Schmid [Math. Z. **40** (1935); dies. Zbl. **11**, 146] wird die folgende allgemeine Regel für Algebren  $k(u, v) = (\alpha, \beta)$  mit  $u^p = \alpha$ ,  $v^p - v = \beta$ ,  $uvu^{-1} = v + 1$  bewiesen:

$$(\alpha, \beta] \sim \left( \pi, \text{Res} \frac{d\alpha}{\alpha} \beta \right).$$

Dabei bezeichnet  $\pi$  irgendein Primelement von  $k$ . Die Regel liefert explizit die arithmetisch-ausgezeichnete Erzeugung von  $(\alpha, \beta]$  als verschränktes Produkt mit unverzweigtem maximal-zyklischen Teilkörper. Insbesondere kann aus ihr leicht der genaue Führer eines zyklischen Körpers  $k(v)$  vom Grade  $p$  bestimmt werden. — Beweis des Existenzsatzes. Für den Fall, daß der Exponent  $n$  der gegebenen Kongruenzdivisorengruppe  $H$  in  $k$  nicht durch die Charakteristik  $p$  teilbar ist, verläuft der Beweis ganz nach dem Muster des bekannten Herbrandschen Beweises für Zahlkörper. Für den Fall, daß  $n$  eine Potenz von  $p$  ist, führt eine einfache Reduktion auf  $n = p$  zurück. Hier kann der Herbrandsche Beweis durch ein wesentlich einfacheres Schlußverfahren ersetzt werden; durch eine auf den Riemann-Rochschen Satz gestützte direkte Indexberechnung werden die längeren Indexberechnungen des Herbrandschen Beweises vermieden.

H. Hasse (Göttingen).



**Morishima, T.: Über die Theorie der Kreiskörper der  $l$ -ten Einheitswurzeln. II.** Jap. J. Math. 11, 225—240 (1935).

Die Arbeit ist inhaltlich und methodisch eine Fortführung einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 8, 54). Es sei  $l$  eine ungerade Primzahl  $\mu = \frac{l-1}{2}$ ,  $K_\nu$  der Kreiskörper der  $l$ -ten Einheitswurzeln,  $h'_\nu$  der erste Faktor der Klassenzahl von  $K_\nu$ . Wieder betrachtet Verf. in § 1 „Basen der irregulären Idealklassengruppe des Kreiskörpers  $K_\nu$  der  $l$ -ten Einheitswurzeln“. In § 2 und § 3 Beziehungen zwischen den Einheiten resp. Grundeinheiten und gewissen Idealklassen. Ferner betrachtet Verf. in § 4 „den ersten Faktor der Klassenzahl von  $K_\nu$ “. Verf. beweist unter anderem den folgenden Satz: „Wenn genau  $n$  unter den  $\mu-1$  ersten Bernoullischen Zahlen  $B_i$  durch  $l$  teilbar sind und ferner  $\frac{B_{\mu+i}}{\mu+i} \equiv (-1)^\mu \frac{B_i}{i} \pmod{l^2}$  für  $m$  unter diesen  $n$  Zahlen gilt, so ist  $\frac{h'_\nu}{h'_{\nu-1}}$  mindestens durch  $l^{n+m}$  teilbar.“ — Mittels dieser Überlegungen kann man das Fermatproblem tiefer angreifen. Lubelski (Warschau).

**Sugawara, Masao: Konstruktion gewisser algebraischer Zahlkörper durch die Modul-funktionen zweier Variablen. I.** Jap. J. Math. 11, 131—184 (1935).

In zwei Arbeiten [Math. Ann. 71, 1—37 (1912); 74, 465—510 (1913)] hat Hecke, dem klassischen Vorbild der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen folgend, durch Einsetzen „singulärer Werte“ in Modulfunktionen zweier Veränderlicher zu gewissen algebraischen Zahlkörpern vierten Grades relativ-Abelsche Zahlkörper erzeugt, die genau angebbare Unterkörper der Hilbertschen absoluten Klassenkörper sind. In der Theorie der komplexen Multiplikation zieht man bekanntlich neben den Werten der Modulfunktion  $j(\omega)$  die Teilwerte der passend normierten  $\varphi$ -Funktion („Webersche  $\tau$ -Funktion“) heran, um außer dem absoluten Klassenkörper auch die Strahlklasskörper zu gewinnen. Will man die Hecke'schen Untersuchungen in entsprechender Richtung weiterführen, so fehlt zunächst das unmittelbare Analogon der  $\tau$ -Funktion. Verf. schlägt deshalb den vielversprechenden Weg ein, mit Hilfe Eisensteinscher Reihen in algebraischen Körpern, wie sie von Hecke [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 3, 213—236 (1924)] eingeführt und dann von Kloosterman [ebenda 6, 163—188 (1928)] weiter untersucht wurden, direkt Funktionen zu konstruieren, welche die gleiche Rolle zu spielen befähigt sind wie in der komplexen Multiplikation die bereits geteilte  $\tau$ -Funktion  $\tau\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m}; w_1, w_2\right)$ . Der entscheidende Ansatz befindet sich in Kap. 2, § 1, „Normierte Funktion“. Es sei  $k$  ein reeller quadratischer Zahlkörper mit gerader Diskriminante  $d = 4D$ ,  $n$  ein ganzes Ideal aus  $k$ ,  $\varrho_1, \varrho_2$  zwei ganze Zahlen aus  $k$ .  $\xi, \xi'$  seien zwei komplexe Veränderliche, die auf das Gebiet  $J(\xi) > 0$ ,  $J(\xi') < 0$  beschränkt werden. Verf. bildet zunächst die Eisensteinsche Reihe

$$G_2(\xi; \varrho_1, \varrho_2; n) = \lim_{s \rightarrow +0} \sum \frac{1}{N(\kappa_1 \xi + \kappa_2)^s |N(\kappa_1 \xi + \kappa_2)|^{2s}},$$

wo  $\kappa_1, \kappa_2$  die von 0, 0 verschiedenen Paare ganzer Zahlen aus  $k$  mit  $\kappa_1 \equiv \varrho_1, \kappa_2 \equiv \varrho_2 \pmod{n}$  durchlaufen, jedoch aus jeder Schar  $\pmod{n}$  assoziierter Paare immer nur ein Paar.  $N$  ist das Zeichen für die verallgemeinerte Normbildung:  $N(\kappa_1 \xi + \kappa_2) = (\kappa_1 \xi + \kappa_2)(\kappa'_1 \xi' + \kappa'_2)$ .  $G_2$  ist eine ganze Modulform der Stufe  $n$  und der Dimension  $-2$  (vgl. Kloosterman, l. c. S. 167). Neben dieser Eisensteinschen Reihe benötigt Verf. aber auch noch die gleichen Bildungen, auf die Hecke seine oben genannten Untersuchungen aufgebaut hatte: Quotienten aus Produkten von Nullwerten der 10 geraden Thetafunktionen mit den Periodizitätsmoduln

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ 0 & 1 & \tau_2 & \tau_3, \end{array}$$

wo  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  durch die Formeln

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{D} (\xi - \xi') \\ \tau_2 &= -\frac{1}{2} (\xi + \xi') \\ \tau_3 &= \frac{1}{2\sqrt{D}} (\xi - \xi') \end{aligned}$$

als Funktionen von  $\xi, \xi'$  definiert sind. Im wesentlichen durch Multiplikation von  $G_2^{1/2}$  mit einem solchen Thetaquotienten bildet Verf. seine „normierte Funktion“  $F(\xi; \varrho_1, \varrho_2; n)$ . Sie ist eine ganze Modulfunktion der Dimension 0 und der Stufe  $n$ . Leider ist der Beweis für die letzte Behauptung nicht ausgeführt, wie überhaupt in der Darstellung jede Motivierung dafür fehlt, warum  $F$  gerade auf diese und nicht eine andere Weise zusammengesetzt wird, insbesondere jede Motivierung für die Wahl der 12. Potenz und der Thetafaktoren. Mit Hilfe



dieses  $F$  werden durch Einsetzen „singulärer Werte“ für die Argumente  $\xi, \xi'$  Strahlklassen-invarianten (für die Strahlklassen in einem total imaginären über  $k$  relativquadratischen Körper  $\mathbb{K}$ ) gebildet. Durch ihre Adjunktion wird der Heckesche Klassenkörper  $\mathbb{K}^*$  zu einem Körper  $\mathbb{K}^{**}$  erweitert. Die Untersuchung wird im vorliegenden 1. Teil bis zum Zerlegungsgesetz der Primideale aus  $\mathbb{K}$  in  $\mathbb{K}^{**}$  fortgeführt. — Es sei noch bemerkt, daß die an sich sehr schwierige und ungewöhnlich viele Vorkenntnisse erfordernde Untersuchung nur zu verstehen ist, wenn der Leser die oben genannten Arbeiten von Hecke und Kloosterman dauernd zur Hand hat, da Verf. ihnen einen beträchtlichen Teil seiner Bezeichnungen stillschweigend entnimmt.

*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Dickson, L. E.:** Cyclotomy and trinomial congruences. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 363—380 (1935).

In finding the number of solutions of such trinomial congruences as  $x^e + y^e + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , where  $p = ef + 1$  is an odd prime, the author needs to determine  $e^2$  cyclotomic constants  $(k, h)$  which may be defined as the number of sets of values of  $t$  and  $z$ , each chosen from  $0, 1, \dots, f-1$ , for which  $1 + g^{et+k} \equiv g^{ez+h} \pmod{p}$ ,  $g$  being a primitive root of  $p$ . If the product of two  $f$ -nomial periods of  $\exp(2\pi i/p)$  be expressed linearly in terms of all the periods the constants  $(k, h)$  appear as coefficients. It is thus possible to obtain  $(k, h)$  from a system of linear equations in terms of the values of certain cyclotomic functions. These in turn are found rationally by a system of Diophantine equations. In case  $\varphi(e) \leq 4$  the theory is particularly simple and was fully treated in a previous paper (this Zbl. **11**, 53). The present paper considers the case in which  $e$  is a prime or twice a prime. The general theory is illustrated by many examples.

*Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

**Schepel, D.:** Über die Pellsehe Gleichung. Nieuw Arch. Wiskde **18**, 1—30 (1935) [Holländisch].

Verschärfung und Zusammenfassung von Sätzen der Doktordissertation des Verf. (Groningen 1932). Sätze folgender Art werden bewiesen: Eine Lösung  $(x_1, y_1)$  von  $x^2 - dy^2 = 1$  ist die Fundamentallösung, wenn eine Zahl  $K \leq y$  existiert,  $x_1 > \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{K}\right)^2 - 1$  ist und die Gleichung keine Lösung hat mit  $y < K$ . Ist  $(x_1, y_1)$  die Fundamentallösung von  $x^2 - dy^2 = 1$  und  $A$  ein Teiler  $\neq 1, \neq -d$  von  $2d$ , dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung von  $u^2 - dv^2 = A$  (wobei  $u$  und  $v$ , falls  $A$  ein Quadrat ist, nicht beide durch  $\sqrt{A}$  teilbar sind), daß es ein Zahlenpaar  $(u_1, v_1)$  gibt (nicht beide durch  $\sqrt{A}$  teilbar, falls  $A$  ein Quadrat ist), für welches  $x_1 = \left| \frac{2u_1^2}{A} - 1 \right|$ ,  $y_1 = \left| \frac{2u_1 v_1}{A} \right|$ . Gibt es ein solches Zahlenpaar, so ist es die Fundamentallösung von  $u^2 - dv^2 = A$ . Bei den Beweisen werden Sätze der Dissertation benutzt.

*N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

**Mignosi, G.:** Le formule di Betti relative all'analisi indeterminata di primo grado. Esercit. Mat., II s. **8**, 77—83 (1935).

Induktionsbeweis des Bettischen Satzes: Ist der größte gemeinsame Teiler  $\delta$  der ganzen Zahlen  $a_i$  ein Teiler von  $a$ , und  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = a$ , dann sind alle ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung gegeben durch die Formel  $x_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n a_j k_{ij}$ , wo  $k_{ij}$  beliebige ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen  $k_{ij} = -k_{ji}$  genügen. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

**Archibald, Raymond Clare:** Mersenne's numbers. Scripta Math. **3**, 112—119 (1935).

Bericht über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse über die Primzahlzerlegungen der Zahlen  $2^p - 1$ , wo  $p$  die Primzahlen bis zu 257 durchläuft, mit ausgedehnten bibliographischen Nachweisen.

*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Chowla, S.:** The greatest prime factor of  $x^2 + 1$ . J. London Math. Soc. **10**, 117 bis 120 (1935).]

Verf. beweist folgenden Satz: „If  $P_x$  denotes the greatest prime factor of  $x^2 + 1$ , then  $P_x > c \log \log x$ , where  $c$  is an absolute positive constant.“ Ich möchte hier



bemerken, daß dieser Satz von K. Mahler bewiesen worden ist: „Über den größten Primteiler der Polynome  $x^2 \pm 1$ .“ Arch. for Math. og Naturvidenskab. B 41, Nr 1 (1933). Lubelski (Warschau).

**Lehmer, D. N.:** Law of reciprocity for tables of linear forms. Tôhoku Math. J. 40: 405—407 (1935).

In einer Tabelle der linearen Formen  $Qu + P$  der Teiler einer quadratischen Form  $x^2 - Qy^2$  findet man für jede Zahl  $Q$  die zugehörigen Zahlen  $P$ , und es ist  $\left(\frac{Q}{P}\right) =$  (Jacobisches Symbol). Eine Zahl  $N$  kommt nicht unter den Zahlen  $P$  vor, wenn  $\left(\frac{Q}{N}\right) = -1$ . Hieraus ergeben sich Sätze, die wichtig sind für die Konstruktion und Kontrolle der Tabelle. Z. B.: Sind  $P_1$  und  $P_2$  zwei Zahlen der Tabelle für  $Q$ , so ist auch  $P_1 P_2 \pmod{Q}$  eine solche Zahl. Mittels des erweiterten Reziprozitätsgesetzes ergeben sich Beziehungen zwischen den Tabellenzahlen von  $Q$  und denjenigen von  $P$ . Verf. hat derartige Sätze benutzt bei der Konstruktion seiner „Factor-stencils“ (vgl. Bull. Amer. Math. Soc. 31, 497; 32, 149). N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Hölder, Otto:** Zur Theorie der Gaußschen Summe. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 87, 27—36 (1935).

Verf. bietet eine einfache Methode zur Wertbestimmung der Gaußschen Summen ohne Vorzeichenbestimmung. Als Anwendung gibt Verf. neue Beweise für bekannte Sätze über die Anzahl der quadratischen Reste und Nichtreste in  $\bar{y} + x_n$ ,  $n=1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ ,  $p$  Primzahl,  $\bar{y}$  ein fester Rest bzw. Nichtrest und  $x_n$  ein System von Resten bzw. Nichtresten durchläuft (vgl. z. B. E. Cahen, Théorie des nombres 2, 102—104. Paris 1929). Lubelski (Warschau).

**Hardy, G. H.:** Second note on a theorem of Mertens. J. London Math. Soc. 10: 91—94 (1935).

In a previous paper [J. London Math. Soc. 2, 70—72 (1927)] the author gave a proof of the theorem

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}$$

depending on a Tauberian theorem of “O” type. A simplified proof is now given, requiring only a Tauberian theorem of “o” type, and assuming less knowledge of the theory of primes. E. C. Titchmarsh (Oxford).

**Wintner, Aurel:** A note on the Riemann  $\xi$ -function. J. London Math. Soc. 10: 82—83 (1935).

The Riemann  $\xi$ -function satisfies the equation

$$\xi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}it\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \cos xt \, dx,$$

where

$$\Phi(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (2n^4 \pi^2 e^{9x} - 3n^2 \pi e^{5x}) \exp(-n^2 \pi e^{4x}),$$

and  $\Phi(-x) = \Phi(x)$ . Hence  $\Phi'(0) = 0$ , and  $\Phi(x)$  is everywhere positive. In this note the author points out the additional property that  $\Phi'(x) < 0$  for every positive  $x$ . E. C. Titchmarsh (Oxford).

**Davenport, H.:** Note on mean-value theorems for the Riemann zeta-function. J. London Math. Soc. 10, 136—138 (1935).

It was proved by Ingham (see this Zbl. 8, 105) that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = \sum_{n=1}^{\infty} d_k^2(n) n^{-2\sigma}$$

for  $\sigma > \frac{1}{2}$ , and any real  $k$  satisfying  $0 \leq k \leq 2$ , where  $d_k(n)$  is the coefficient of  $n^{-\sigma}$  in the Dirichlet series for  $\zeta^k(s)$ . The author gives a new proof of this, depending on



the method of approximating to  $\zeta(s)$  on the average by  $\prod_{p \leq N} (1 - p^{-s})^{-1}$  for  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ . It is also shown that the result holds for any integer  $k$  and

$$\sigma > 1 - \frac{\nu + 1}{2k + 2^\nu - 2},$$

where  $\nu$  is determined by

$$(\nu - 1)2^{\nu-2} + 1 < k \leq \nu 2^{\nu-1} + 1.$$

*E. C. Titchmarsh (Oxford).*

**Petrovitch, Michel:** Remarques arithmétiques sur les intégrales abéliennes à coefficients tayloriens commensurables. Publ. Math. Univ. Belgrade **3**, 1—12 (1934).

Vergleicht man die Potenzreihen für  $\ln(1-x)$  und  $xe^x$ , so bemerkt man, daß der Quotient entsprechender Koeffizienten eine ganze Zahl oder ein Bruch mit dem Nenner  $n$  ist, je nachdem der Exponent  $n$  eine zusammengesetzte oder eine Primzahl ist (Ausnahme  $n = 4$ ). Eine solche Beziehung zwischen zwei Funktionen wird eine „Korrespondenz (A)“ genannt. Solche Korrespondenzen finden auch statt, wenn statt des Logarithmus andere Abelsche Integrale genommen werden. — Eine ähnliche Aussage läßt sich über die beiden Funktionen  $\frac{1}{2} \ln[(1-x)^2/(1-2x)]$  und  $1/(1-x)$  machen, nur daß hier die Rollen der Primzahlen und der zusammengesetzten Zahlen vertauscht sind [„Korrespondenz (B)“]. — Weitere Ausdehnung dieser Überlegungen.

*L. Schrutka (Wien).*

**Ward, Morgan:** An arithmetical property of recurring series of the second order. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 825—828 (1934).

In the case of the sequence  $W_0, W_1, \dots, W_n, \dots$  of integers satisfying the recurrence relation  $\Omega_{n+2} = P\Omega_{n+1} - Q\Omega_n$ , where  $P$  and  $Q$  are integers, a criterion is established with respect to an odd prime  $p$  not dividing  $Q$  or  $P^2 - 4Q$  which reduces the problem of determining when multiples of  $p$  will appear in a sequence ( $W_n$ ) to the more fundamental (unsolved) problem of determining the characteristic number and the restricted period of the associated Lucas functions, under the assumption that this restricted period shall be odd.

*R. D. Carmichael (Urbana).*

**Ward, Morgan:** An enumerative problem in the arithmetic of linear recurring series. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 435—440 (1935).

In a recent paper [Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 600—628 (1933); this Zbl. **7**, 249] Morgan Ward considered the problem of determining the characteristic number modulo  $m$  of the sequence  $U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$  of integers satisfying the recurrence relation

$$\Omega_{n+k} = c_1\Omega_{n+k-1} + c_2\Omega_{n+k-2} + \dots + c_k\Omega_n$$

in terms of  $m, c_1, c_2, \dots, c_k, U_0, U_1, \dots, U_{k-1}$ , reducing it to certain basic problems in the theory of higher congruences. In the present paper he effects a similar reduction of the following problem: When any positive integer  $s$  is given, to find the number of distinct sequences ( $U$ ) modulo  $m$  whose characteristic number is exactly equal to  $s$ .

*R. D. Carmichael (Urbana).*

**Chowla, Inder:** Some problems of Waring's type. II. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 780—781 (1935).

The author defines  $\theta(k)$  as the least  $s$  for which there exists a number ( $c = c(k)$ )

such that there are an infinity of solutions of  $c = \sum_{m=1}^s e_m u_m^t$  (where each  $e_m$  is  $+1$  or  $-1$ )

in rational  $u_m$ . In consequence of known results,  $\theta(3) = 2$ ,  $\theta(4) \leq 3$ ,  $\theta(5) \leq 6$ . The author proves  $\theta(6) \leq 5$ ,  $\theta(8) \leq 8$  and also  $\theta(7) \leq 9$ ,  $\theta(9) \leq 13$ ,  $\theta(11) \leq 17$ , but conjectures  $\theta(k) \leq k$ . The proof of  $\theta(6) \leq 5$  is:

$$-360^2 = \left(720x^5 + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(720x^5 - \frac{1}{x}\right)^6 - \left(360x^5 + \frac{2}{x}\right)^6 + \left(360x^5 - \frac{2}{x}\right)^6 - (360x^4)^6$$

(see this Zbl. **11**, 201).

*Davenport (Cambridge).*



**Vinogradov, I. M.:** Sur l'approximation au moyen des fractions rationnelles dont les dénominateurs sont des puissances de nombres entiers. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 1—4 u. franz. Zusammenfassung 5 (1935) [Russisch].

Verf. beweist folgenden Satz: „Soit  $n$  un entier  $\geq 10$ . Il existe alors une constante  $L$ , dépendant seulement du nombre  $n$ , telle que pour un  $Q > 1$  quelconque et un  $\alpha$  réel on peut trouver des entiers  $z$  et  $m$  qui vérifient les inégalités  $|az^n - m| < LQ^{-\varepsilon}$ ,  $0 < z < Q$ , où  $\varrho = \frac{1}{15n^2 \lg 10n}$ .“ Für  $\varrho = \frac{n}{n2^{n-2} + 1} - \varepsilon$  hat Verf. den Beweis in Bull. Acad. Sci. URSS 1927 gegeben. Die Methode des Beweises ist dieselbe wie in C. R. Acad. Sci. URSS 2, 337—341 (1934) (vgl. dies. Zbl. 10, 9). *Lubelski.*

**Chowla, S.:** A theorem on sums of powers with applications to the additive theory of numbers. II. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 1, 701—706 (1935).

Let  $v(k)$  denote the least  $v$  such that all integers have the form  $\pm m_1^k \pm \dots \pm m_v^k$ ,  $m_i$  integers, for arbitrary choice of signs. Chowla's method is one of integration of identities

$$\sum (x + a_i)^k = \sum (x + b_i)^k \quad (\text{different sets of } a_i \text{ and } b_i), \quad (1)$$

summation over  $i = 1, \dots, s$ , to obtain one of the form

$$\sum (x + a_i)^g - \sum (x + b_i)^g = cx + d, \quad c \neq 0; \quad (2)$$

whence  $v(g) \leq 2s + 4g$ , since every residue is a sum of at most  $4g$  residues  $\pm m^g \pmod{c}$ . In place of (2) we may consider

$$\sum a_i^v = \sum b_i^v \quad (v = 1, \dots, g-2; \text{ not for } v = g-1). \quad (3)$$

Necessarily  $s > k$ ; further we may take  $s \leq \frac{1}{2}(k^2 + k) + 1$ , for there are integers with more than  $\varepsilon n^{(s/k)-1}$  expressions as a sum of  $s$   $k$ th powers, and if  $s \geq \frac{1}{2}(k^2 + k) + 1$  there are enough to supply equalities among the sums of the  $r$ th powers of the same bases ( $r = 1, \dots, k-1$ ). Then  $k+1 < g < s+2$ ; choose integers  $t$  and  $m$  ( $< k$ ) such that  $tk < g-1 \leq (t+1)k$ ,  $t(k+m) < g-1 \leq t(k+m+1)$ ; we can replace  $a_i$  and  $b_i$  by  $x + a_i$  and  $x + b_i$  to make (3) false for  $v = t(k+m+1)$ , but necessarily still true for  $v = t, 2t, \dots, t(k+m)$ ; then use  $a_i^t$  and  $b_i^t$  for new  $a_i$  and  $b_i$ . Thus we secure  $k+1 < g \leq 2k+1$ , and Chowla's theorem: for every  $k > 1$  we can choose  $g$  such that  $k < g-1 \leq 2k$  and  $v(g) \leq k^2 + 9k + 6$ . Corollary: for infinitely many  $k$ ,  $v(k) \leq k^2 + 7k - 2$ . Misprint: in (20) change  $\theta$  to  $t\theta$  (see this Zbl. 11, 248). *G. Pall (Montreal).*

## Analysis.

**Bhar, S.:** On the mean value theorem of the differential calculus. Indian Phys.-Math. J. 6, 27—29 (1935).

Takahashi [Tôhoku Math. J. 29 (1928)] gab eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung bei gleichzeitiger Betrachtung von  $n$  Differenzen  $f_i(x+h) - f_i(x)$ . Verf. untersucht, wann in diesem Mittelwertsatze der auftretende Mittelwert  $\theta$  von  $x$  und  $h$  unabhängig ist. Für  $n = 1$  ist die Frage von Rothe [Math. Z. 9 (1921)] behandelt. — Die Arbeit ist durch viele Druckfehler entstellt. Der entscheidende Schluß am Ende der Arbeit erscheint dem Ref. unbegründet.

*Rogosinski (Königsberg).*

**Kok, F. de:** Ein Mittelwertsatz für Stieltjesintegrale. Nieuw Arch. Wiskde 18, 75—76 (1935) [Holländisch].

Verf. beweist den folgenden Satz: Wenn  $a < \alpha < \beta < b$ ,  $\varphi(x)$  nicht abnehmend für  $a \leq x \leq b$ ,  $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ ,  $f(x)$  stetig für  $a \leq x \leq b$ , so gilt:

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = f(\xi) \{ \varphi(b) - \varphi(a) \},$$

wo  $a < \xi < b$ . Er verwendet ihn für einen neuen Beweis eines Schaake-Wolffschen Mittelwertsatzes [Nieuw Arch. Wiskde 16, 28—33 (1930)].

*O. Bottema.*



**Mihoc, G.:** Sur la détermination de l'intervalle de contraction de la formule de la moyenne. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1654—1655 (1935).

Es wird gezeigt, daß die Resultate von Tchakaloff [dies. Zbl. **1**, 58; unter dem letzten Integralzeichen auf Zeile 4 dieses Ref. muß es  $p(x)$  statt  $\varphi(x)$  heißen] sehr einfach aus geläufigen Sätzen über das Momentenproblem entnommen werden können.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Manià, Basilio:** Sopra un teorema di Gauss. Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 149—152 (1935).

Si dimostra il teorema di Gauss sul flusso dei campi newtoniani nel caso di una distribuzione volumetrica di massa per una superficie chiusa avente dei punti comuni con la massa generatrice del campo.

Autoreferat.

**Britton, J. R.:** A note on polynomial curves. Amer. Math. Monthly **42**, 306—310 (1935).

Soll das Polynom  $(n+1)$ -ten Grades  $y$  an den Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  Extremwerte von den Beträgen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  annehmen, so ist  $y'$  durch  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bis auf einen Faktor bestimmt, und bei  $y$  kommt noch eine Integrationskonstante dazu. Man kann daher dem Polynom  $y$  zwei Bedingungen auferlegen, etwa die Werte  $y_1$  und  $y_2$  vorschreiben. Dabei kann in Ausnahmefällen die Bestimmung von  $y$  unmöglich werden. Insbesondere ergibt sich folgende Aussage: Werden die Stellen  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3, \dots, x_n$  und die Werte  $y_1$  und  $y_2$  vorgeschrieben, so läßt sich  $y$  bestimmen, wenn der Ausdruck  $S'_{n-2}/1.3 + S'_{n-4}/3.5 + S'_{n-6}/5.7 + \dots \neq 0$  ist; ist insbesondere  $y_1 = y_2$ , so wird  $y$  eine Konstante. Wenn dagegen der genannte Ausdruck 0 ist, so ist die Bestimmung von  $y$  für  $y_1 \neq y_2$  unmöglich, für  $y_1 = y_2$  dagegen ergeben sich  $\infty^1$  Polynome. Dabei bedeuten  $S'_0 = 1, S'_1, S'_2, \dots, S'_{n-2}$  die symmetrischen Grundfunktionen von  $x_3, x_4, \dots, x_n$ . — Sind  $x_1$  und  $x_2$  benachbarte Nullstellen von  $y'$ , so ist für  $y_1 \neq y_2$  das Polynom  $y$  stets eindeutig bestimmt. — Sind die Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  gegeben, so ist  $y$  für jeden Wert von  $x_n$ , ausgenommen einen einzigen „Ausnahmewert“, eindeutig bestimmt.

L. Schrutka (Wien).

**Whittaker, J. M.:** The uniqueness of expansions in polynomials. J. London Math. Soc. **10**, 108—111 (1935).

Comme suite à une note antérieure [Quart. J. Math. **5**, 224—239 (1934); ce Zbl. **9**, 342], où il s'agissait de la possibilité du développement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) Q_n f(0), \quad p_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} z^k, \quad Q_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_{\nu n}}{\nu!} \frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}},$$

l'auteur en énonce ici une condition d'unicité: pour que l'on ait identiquement

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n p_n(z) = 0 \quad (\text{dans un cercle } |z| \leq R \neq 0),$$

il est nécessaire et suffisant que les relations suivantes soient vérifiées pour  $k=0, 1, 2, \dots$ :

$$1^{\circ}. \quad \sum_{n=0}^{\infty} l_n p_{nk} = 0, \quad 2^{\circ}. \quad \left| \sum_{n=0}^{\nu} l_n p_{nk} \right| < M \varrho^k,$$

$M$  et  $\varrho$  étant deux nombres positifs.

W. Gontscharow (Moskau).

**Casimir, H.:** Einige Bemerkungen über Systeme von orthogonalen Funktionen. Nieuw Arch. Wiskde **18**, 56—62 (1935) [Holländisch].

Sind  $e_i(n)$ , ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) die Komponenten von  $N$  untereinander senkrechten Einheitsvektoren  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) und  $f(n)$  die eines willkürlichen Vektors in  $R_N$ , so gelten bekanntlich die Relationen

$$\sum_{n=1}^N e_i(n) e_j(n) = \delta_{ij} \dots (A_N); \quad \sum_{i=1}^N e_i(n) e_i(m) = \delta_{nm} \dots (B_N);$$

$$\sum_n f(n)^2 = \sum_i \left[ \sum_n e_i(n) f(n) \right]^2 \dots (V_N); \quad f(n) = \sum_i e_i(n) \sum_m e_i(m) f(m) \dots (O_N).$$



In der Theorie der Systeme von Orthogonalfunktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , findet man die Analoga von  $A_N$ ,  $V_N$  und  $O_N$ :

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \dots (A); \quad \int_a^b f(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \right]^2 \dots (V);$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_a^b \varphi_n(x') f(x') dx' \dots (O).$$

Verf. gibt zwei Analoga von  $B_N$  an, nämlich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(x) dx \int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(x') dx' = \Delta \dots (B);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(x') dx' = \begin{cases} 1, & x_1 < x < x_2 \\ \frac{1}{2}, & x_1 = x \text{ oder } x = x_2 \dots (B') \\ 0, & x < x_1 \text{ oder } x_2 < x \end{cases}$$

Hierbei ist  $\Delta$  die Länge des Intervalls, das  $x_1 \leq x \leq x_2$  und  $x_1' \leq x \leq x_2'$  gemeinsam haben.  $(B)$  geht durch Integration aus  $(B')$  hervor, aber  $(B)$  kann einen Sinn haben, auch wenn  $(B')$  nicht existiert. Verf. beweist, daß  $(V)$  aus  $(B)$  hervorgeht und gibt an, wie  $(O)$  aus  $(B')$  folgt. Er beweist  $(B)$  und  $(B')$  für die Fouriersche Reihe und zeigt noch, wie  $(B)$  durch ein Limesverfahren aus  $B_N$  abgeleitet werden kann.

O. Bottema (Sappemeer, Niederlande).

● **Walsh, J.-L.: Approximation by polynomials in the complex domain.** Mém. Sci. math. Fasc. 73, 72 p. (1935).

Seit dem Erscheinen des Montelschen Buches: *Séries de polynomes* (Paris 1910), hat die Theorie der Approximationen im komplexen Gebiete sehr wesentliche Fortschritte aufgewiesen. Verf. unternimmt es nun, diese Entwicklung in ihren wichtigsten Zügen darzustellen. Es kommt ihm dabei weniger auf die Vollständigkeit des Materials als auf das Herausstreichen der typischen Methoden an. Das Büchlein gibt in der Tat ein klares und plastisches Bild der Theorie, das sowohl dem Anfänger als auch dem Kenner des Gegenstandes in jeder Hinsicht nützlich sein kann. Es sind diverse neue Resultate aufgenommen und eine beträchtliche Anzahl von ungelösten Problemen formuliert worden, welche die Lektüre des Buches besonders anregend gestalten. — Kurze Inhaltsangabe: Kap. I enthält in der Hauptsache Runge's Theorem und verwandte fundamentale Bemerkungen. In Kap. II wird die Approximation einer im abgeschlossenen Innern einer Jordankurve regulären analytischen Funktion durch ein Polynom  $n$ -ten Grades in der Form  $M\vartheta^n$  ( $0 < \vartheta < 1$ ) gewonnen. Dies beruht auf der von Hilbert herrührenden Lemniskatenmethode. Kap. III behandelt Fragen der „besten Approximation“ in Komplexen unter Zugrundelegung verschiedener Approximationsmaße. Kap. IV handelt von den sog. Gebietspolynomen, d. h. Typen von Polynomsystemen, die von einem gegebenen Gebiete abhängen und für jede darin reguläre Funktion eine nach den betreffenden Polynomen fortschreitende Entwicklung zulassen. Die wichtigsten Typen solcherart sind: die Faberschen Polynome, die vom Ref. eingeführten orthogonalen Polynome, die Tschebyscheffschen Polynome usw. Kap. V behandelt die Interpolation im komplexen Gebiete, insbesondere in den Einheitswurzeln auf dem Einheitskreise (Runge) und allgemeiner in den durch die konforme Abbildung des Außengebietes definierten „regelmäßig“ verteilten Punkten einer beliebigen Kurve (Fejér). In diesem Zusammenhange wird auch der Begriff des transfiniten Durchmessers (Fekete) eingeführt, der jedoch, nach Ansicht des Ref., mehr in Kap. III hineingehört hätte. Schließlich wird in Kap. VI die Approximation durch Polynome betrachtet, welche Nebenbedingungen interpolatorischer Art unterworfen sind. — Eine ausführliche Literaturzusammenstellung schließt das Buch ab.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).



**Picone, M.: Sulla trasformata di Laplace.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 306—313 (1935).

Bedingungen (zum Teil notwendige und hinreichende) dafür, daß eine analytische Funktion  $f(z)$  die Laplacetransformierte einer Funktion  $F(t)$  ist:  $f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} F(t) dt$ . Z. B.: Dann und nur dann ist die analytische Funktion  $f(z)$  die Laplacetransformierte der komplexwertigen Funktion  $F(t)$  mit  $\int_0^\infty |F(t)|^2 e^{-t} dt < \infty$ , wenn  $f(z)$  in der Halbebene  $x > \frac{1}{2}$  regulär ist und dort die Entwicklung  $f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^\infty q_n \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n$  mit  $\sum_{n=0}^\infty |q_n|^2 < \infty$  zuläßt;  $F(t) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{2n}{n!} L_n(t)$ , wobei  $L_n(t)$  das  $n$ -te Laguerresche Polynom bedeutet.

Daraus einfache Abschätzungen für  $|f(z)|$ . Kriterien dafür, daß  $F(t)$  „stabil“ ausfällt, d. h. daß  $|F(t)|$  und  $|F'(t)|$  beschränkt bleiben. Ähnliche Sätze für die Transformation  $f(z) = \int_0^1 F(t) e^{tz} dt$ . Rellich (Marburg, Lahn).

**Tricomi, F.: Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre. II. Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 332—335 (1935).

Folgerungen aus Teil I (dies. Zbl. 11, 204), die zu einer Reihe (zum Teil bekannter) Entwicklungen mit Laguerreschen Polynomen führt. Z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} = e t^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t}) \quad (\alpha > -1) \quad \text{oder} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{H_{2n+1}(x/\sqrt{2})}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

Rellich (Marburg, Lahn).

**Tricomi, F.: Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 420—426 (1935).

Mit den Bezeichnungen der Note Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre I (dies. Zbl. 11, 204) wird gezeigt: Es sei  $f(s)$  eine analytische Funktion, für die  $sf(s)$  in der Halbebene  $R(s) \geq b$  regulär und beschränkt ausfällt; dann ist für  $h \geq \frac{1}{2} - b$ ,  $0 < \alpha < 1$

$$F(t, \alpha) = e^{-ht} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n a_n L_n(t)$$

absolut und gleichmäßig in jedem endlichen Intervall der Achse  $t \geq 0$  konvergent, und es ist

$$f(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^\infty e^{-st} F(t, \alpha) dt.$$

Anwendung auf die Funktion  $f(s) = \frac{1}{s} e^{-as}$ .

Rellich (Marburg, Lahn).

### Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

**Bohr, Harald: Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. V.** Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. 13, H. 8, 1—13 (1935).

Eine Verallgemeinerung eines über den Quotient  $h(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$  zweier in  $[\alpha, \beta]$  regulären fastperiodischen Funktionen früher vom Verf. bewiesenen Satzes [Acta math. 47, 237—281 (1926)]. Im ursprünglichen Satze setzt man voraus, daß die Funktion  $g(s)$  im Streifen  $(\alpha, \beta)$  von Null verschieden ist, während in der vorliegenden Arbeit nur vorausgesetzt wird, daß der Quotient  $h(s)$  in  $(\alpha, \beta)$  regulär ist, d. h. jede im Streifen  $(\alpha, \beta)$  gelegene Nullstelle von der nicht identisch verschwindenden Funktion  $g(s)$  soll zugleich Nullstelle von  $f(s)$  sein, und zwar von mindestens ebenso hoher Multiplizität. Es wird bewiesen, daß dieser Quotient  $h(s)$  wiederum eine in  $[\alpha, \beta]$



fastperiodische Funktion ist. Ferner wird mittels dieses Satzes der Quotient zweier in  $[-\infty, \beta]$  fastperiodischen Funktionen  $f(s)$  und  $g(s)$  studiert, für welche die Glieder der entsprechenden Dirichletentwicklungen so geordnet werden können, daß die Exponentenfolgen  $A_1, A_2, \dots$  und  $M_1, M_2, \dots$  monoton wachsen und gegen  $+\infty$  streben, falls diese nicht nur aus endlich vielen Elementen bestehen. Schließlich verspricht der Verf. auf den Zusammenhang der Untersuchungen von Ritt mit der Theorie der fastperiodischen Funktionen in einer späteren Arbeit genauer einzugehen (III, IV, vgl. dies Zbl. **1**, 138).

Richard Petersen (Kopenhagen).

Offord, A. C.: Note on a theorem of H. Bohr. J. London Math. Soc. **10**, 139—143 (1935).

A Dirichlet series, having a half-plane of convergence, whose exponents  $\lambda_n$  satisfy Schnee's condition

$$[\lambda_{n+1} - \lambda_n]^{-1} = O(\exp e^{\varepsilon \lambda_n}) \text{ for every } \varepsilon > 0, \quad (1)$$

has the property that  $\sigma_u$ , its abscissa of uniform convergence, coincides with  $\sigma_b$ , the abscissa of boundedness and regularity of the function [theorem of Bohr, extended by Landau, condition (1) is the best possible of its kind according to Neder]. The author extends this theorem to Laplace integrals

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-su} dA(u), \quad (2)$$

where  $A(u)$  is of bounded variation in every finite range,  $A(+0) = 0$ , and the integral is  $(C, k)$ -summable in some half-plane for some  $k$ . Condition (1) is here to be replaced by

$$\int_0^{\omega+\tau} |dA(u)| = O(e^{\varepsilon \omega}), \quad \tau = \exp(-e^{\varepsilon \omega}) \quad (3)$$

for every  $\varepsilon > 0$ . The same theorem is also true for integrals of the form

$$\int_0^\infty e^{-su} a(u) dA(u),$$

where  $a(u)$  is measurable and  $O(e^{\varepsilon u})$  for every  $\varepsilon > 0$ , the integral being  $(C, k)$ -summable somewhere. From this result the author concludes that convergence in the assumptions of the Bohr-Landau theorem can be replaced by  $(C, k)$ -summability. He also considers the case in which condition (3) holds for a fixed  $\varepsilon = \Delta$ . The corresponding results (Theorems 2 and 5) are erroneously stated, Th. 5 in particular contradicts Neder's results. The error is easily corrected, however, and the author's method gives the interesting theorem,  $\sigma_u - \sigma_b \leq \Delta$ . This result is actually the best of its kind, as is shown by Neder's example [Math. Z. **14**, 149—158 (1922) esp. 150—151].

E. Hille (New Haven, Conn.).

### Differentialgleichungen:

Chao, Robert F. H.: Method of undetermined coefficients for finding a particular integral. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **3**, 77—83 (1935).

An elementary rule for finding a particular integral of a linear differential equation with constant coefficients when the right-hand member has only a finite number of linearly independent derivatives.

Janczewski (Leningrad).

Boos, Pierre: Sur l'intégrale générale de certaines équations différentielles considérées comme fonction des constantes d'intégration. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1820—1822 (1935).

Das Integral der Differentialgleichung  $y'' = F(y', y, x)$ , für das  $y = 0$ ,  $y' = d$ , für  $x = x_0$  gilt, werde mit  $y(x - x_0, x_0, d)$  bezeichnet. Es werden Bedingungen dafür aufgestellt, daß sich dieses Integral in eine der Formen  $y = f(x - x_0, x_0) H(x - x_0, d)$  bzw.  $y = f(x - x_0) H\left[\frac{x - x_0}{h(x_0)}, dh(x_0)\right]$  setzen läßt. Analoge Frage für die Differentialgleichung  $y''' = F(y'', y', y, x)$ .

Rellich (Marburg, Lahn).



**Langer, Rudolph E.:** On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes' phenomenon about a singular point. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 397—416 (1935).

If  $\lambda$  is a large parameter the asymptotic dependence on  $\lambda$  and  $s$  of the solutions of the differential equation

$$w''(s) + w(s) \{ \lambda \psi(s) + \tau(\lambda, s) \} = 0$$

is studied when  $\tau(\lambda, s)$  and  $\psi(s)$  become respectively infinite and either infinite or zero. This is another case of the incidence of the Stokes' phenomenon and is studied in detail when  $\tau(\lambda, s)$  has a pole  $s = s_0$  of the first or second order and  $\psi(s)$  contains a factor  $(s - s_0)^\nu$  where  $\nu > -2$ . — The differential equation is reduced to a normal form and associated with a related equation whose solutions are discussed. — The results are not readily summarised but they are applicable to the equations for the associated Legendre functions, for the Laguerre functions and for the Mathieu functions of higher order.

H. Bateman (Pasadena).

**Schiefner, L. M.:** Entwicklung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen mit außerwesentlichen singulären Punkten in Reihen nach Potenzen von Elementen der Differentialsubstitutionen. Trav. Inst. math. Stekloff 9, 235—266 (1935) [Russisch].

Im 1. Teil werden Formeln abgeleitet, welche Taylorsche und Laurentsche Reihen einer bzw. mehrerer Matrizen zweiter Ordnung als Potenzreihen der Elemente dieser Matrizen darstellen, mit Multiplikatoren — gewissen von den Elementen unabhängigen Matrizen. Der 2. Teil enthält die Anwendung dieser Formeln auf die Matrizenreihen von Lappo-Danilewski. Dieser hat nämlich die Integrale des Differentialgleichungssystems vom Fuchsschen Typus, in Matrizenform aufgeschrieben:

$$\frac{dY}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{YU_j}{x-a_j}, \quad (\text{I})$$

als Potenzreihen der Matrizen  $U_i$  („Differentialsubstitutionen“) dargestellt [Trav. Inst. Stekloff 6 (1934); dies. Zbl. 9, 350]. Für den Fall eines Systems (I) zweiter Ordnung erhält also der Verf. die Fundamentallösungen als Potenzreihen der Koeffizienten des Systems (I). Im 3. Teil wird die Fuchssche Gleichung zweiter Ordnung betrachtet:

$$y'' + \frac{p}{y} y' + \frac{q}{y^2} y = 0,$$

$\psi = (x - a_1) \dots (x - a_l)$ ,  $p$  Polynom vom Grade  $\leq l - 1$ ,  $q$  vom Grade  $k \leq 2l - 2$ ; sie wird auf ein System der Gestalt (I) mit  $m = \max[l, k + 1]$  außerwesentlichen singulären Stellen reduziert. Auf diese Weise werden die Ausdrücke der Integrale erhalten, die von den Koeffizienten der Gleichung sowie von  $m - l$  willkürlich ausgewählten Nebensingularitäten abhängen. — Die Arbeit setzt die Kenntnis der Resultate von Lappo-Danilewski voraus und benutzt ohne Erklärung oder Zitate seine Bezeichnungen; es fehlt sogar jede Erwähnung von Lappo-Danilewski sowie die Problemstellung des Verf.

W. Stepanoff (Moskau).

**Srinivasiengar, C. N.:** Singular solutions of simultaneous ordinary differential equations. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 1, 668—693 (1935).

Verf. versucht die bekannte ältere Theorie singulärer Lösungen einer impliziten Differentialgleichung  $\Phi(x, y, y') = 0$  auf Systeme

$$\Phi_r(x, y, z, y', z') = 0 \quad (r = 1, 2)$$

zu übertragen und gibt dazu 13 Beispiele. Die Untersuchungen stützen sich auf ältere Begriffsbildungen, die heute nicht mehr als ausreichend anerkannt werden und entbehren der erforderlichen Präzision. Neuere Untersuchungen (Kamke, Zaremba) sind nicht berücksichtigt.

Kamke (Tübingen).



**Artemiew, N. A.: Abschätzung der Periode von nichtlinearen Schwingungen mit Hilfe der Methode der Integralgleichungen.** Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 8, 1231 bis 1234 u. dtsh. Zusammenfassung 1235 (1934) [Russisch].

Es sei  $T$  die Periode der Lösungen der Differentialgleichung  $z'' + k^2 z = 0$  (1);  $T + \tau$  die der gestörten  $z'' + k^2 z = \mu f(z)$  (2); die Gl. (2) ist konservativ und  $\tau$  hängt folglich im allgemeinen von den Anfangswerten ab;  $\mu$  sei so klein gewählt, daß nach Poincarés Theorem die Gl. (2) periodische Lösungen zuläßt, die für  $\mu = 0$  in die der Gl. (1) übergehen;  $f(z)$  sei holomorph für  $z = 0$  und verschwinde für  $z = 0$ ; dann kann mit Hilfe der Integralgleichungstheorie die folgende Abschätzung für  $|\tau|$  gegeben werden:

$$\frac{\sin \frac{|\varepsilon|}{2}}{2\pi + \varepsilon} \leq \mu \frac{\alpha}{2k^2}$$

(vorausgesetzt daß  $|\varepsilon| < \pi$  ist), wo  $\varepsilon = \tau \frac{2\pi}{T}$  ist;  $\alpha$  die Lipschitzsche Konstante bedeutet ( $|f(z_2) - f(z_1)| \leq \alpha |z_2 - z_1|$ ). Die vom Verf. gegebene Abschätzung ist unabhängig von den Anfangswerten. *A. Andronoff, A. Witt (Moskau).*

**Mandelstam, L., und N. Papalexi: Über einige nichtstationäre Schwingungsvorgänge.** Techn. Physics USSR 1, 415—428 (1935).

In der vorliegenden Arbeit werden zwei frühere Arbeiten der Verff.: „Über die Begründung einer Methode zur angenäherten Lösung von Differentialgleichungen“ [J. exper. u. theor. Phys. 4, H. 2 (1934) (russisch)] und „Über nichtstationäre Vorgänge bei Resonanzerscheinungen zweiter Art“ [J. techn. Phys. 4, 67—77 (1934) (russisch)] zusammengefaßt. Der erste Teil ist der mathematischen Begründung der van der Polschen Methode [Forced Oscillations in a Circuit with non-linear Resistance. Philos. Mag., VII. s. 3, 65, Nr 13 (1927)] zur Integration der Differentialgleichungen der Form:  $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$ ,  $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda \sin nt$  ( $\mu$  genügend klein) gewidmet; es werden Bereiche der Anwendbarkeit dieser Methode angegeben. Im zweiten Teil wird diese Methode zur Untersuchung der Einstellungsprozesse bei Resonanzerscheinungen zweiter Art (Mandelstam und Papalexi; vgl. dies. Zbl. 3, 225) angewandt; dabei ist  $f(x, \dot{x})$  als kubisches Polynom angenommen; es wird gezeigt, daß in diesem Fall die van der Polsche Methode zur Integration einer Bernoullischen Gleichung führt und folglich die Integration vollständig durchgeführt werden kann.

*A. Andronoff, A. Witt (Moskau).*

**Collatz, Lothar: Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen.** Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 3, H. 1, 1—34 (1935).

Unter einer höheren Approximation eines linearen Differentialausdrucks  $Lf(P_i)$   $m$ -ter Ordnung bei beliebiger Zahl der unabhängigen Veränderlichen versteht der Verf. einen Ausdruck von der Form  $\sum_{\varrho=1}^N C_{\varrho} f(P_{\varrho})$ , wenn seine Entwicklung in eine

Taylorischen Reihe nach Potenzen der Koordinatendifferenzen der Punkte  $P_{\varrho}$  und  $P_i$  bis auf Glieder höherer als  $m$ -ter Ordnung mit  $Lf(P_i)$  übereinstimmt. Z. B. ist 
$$\frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$
 für  $f'(x)$  eine solche höhere Approximation.

§ 1 enthält allgemeine Erörterungen über das Differenzenverfahren mit solchen höheren Approximationen, insbes. über Fehlerabschätzung. § 2 beschäftigt sich mit finiten Ausdrücken in einer Dimension. Hier werden reguläre Punktgitter von Punkten  $x_{\varrho} = x_0 + \varrho h$  zugrunde gelegt. Allgemeine Formeln mit Restglied werden aufgestellt für  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  und spezielle Formeln für  $f'''(x)$ ,  $f^{(4)}(x)$ ,  $f^{(5)}(x)$ ,  $f^{(6)}(x)$ ,  $f^{(7)}(x)$ ,  $f^{(8)}(x)$ . Als Anwendungsbeispiel wird das Eigenwertproblem  $f'' = \lambda x^2 f$ ,  $f'(0) = f(1) = 0$  numerisch behandelt. § 3 bringt allgemeine Erörterungen über die Bildung finiter Ausdrücke in mehreren Dimensionen, insbes. zweckmäßige Auswahl der Gitterpunkte. Bei der Berechnung von solchen finiten Ausdrücken für Differentialausdrücke, in denen



zwei unabhängige Variable auftreten, werden rechteckige Punktgitter mit den Punkten  $x = x_0 + ih$ ,  $y = y_0 + kl$  zugrunde gelegt. § 4 behandelt das Differenzenverfahren für die erste Randwertaufgabe bei der Differentialgleichung

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - g(x, y) f = t(x, y),$$

wobei  $A$  und  $B$  positive Konstante,  $g$  und  $t$  stetig sind und  $g > 0$ . Für diesen Fall werden finite Gleichungen aufgestellt und ihre Lösbarkeit bewiesen. Ferner wird für das Torsionsproblem bei einem quadratischen Bereich ( $\Delta f = c$ ,  $f$  am Rande gleich Null) das Verfahren und eine Fehlerschätzung numerisch durchgeführt. § 5 behandelt das Differenzenverfahren für das Anfangswertproblem bei der inhomogenen und homogenen Wellengleichung  $L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t(x, y)$  bzw.  $L(f) = 0$ . § 6 das Differenzenverfahren bei dem Anfangswertproblem der inhomogenen und homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$Lf = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k \frac{\partial f}{\partial y} = t(x, y) \text{ bzw. } L(f) = 0.$$

Hier ist bemerkenswert, daß die Lösung der Differenzengleichung im allgemeinen nicht gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert, wohl aber, wenn man  $h$  und  $l$  gemäß dem Ansatz  $2l = kh^2$  gegen Null konvergieren läßt. Die Fehlerschätzungen in § 4—6 werden immer so durchgeführt, daß die Existenz der Lösung der Differentialgleichung und ihre Differentialquotienten von bestimmter Ordnung als bekannt angesehen wird und die zu ermittelnde Schranke mit dem Maximalbetrag eines solchen höheren Differentialquotienten in Beziehung gebracht wird. *Funk.*

**Mitrinowitch, Dragoslav S.:** Cas d'intégrabilité d'une certaine classe d'équations différentielles algébriques du premier ordre. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 247—248 (1935).

**Wazewski, T.:** Sur le domaine d'existence des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Bull. Sci. math., II. s. 59, 100—104 (1935).

Für die Lösung  $z = z(x, y_1, \dots, y_n)$  der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$p = f(x, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu} \quad (1)$$

wird ein Existenzsatz „im großen“ aufgestellt und sein Beweis skizziert. Vorausgesetzt wird:  $f$  habe in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung,  $\omega(\eta_1, \dots, \eta_n)$  sei in dem Quader

$$x = 0, \quad a_\nu \leq \eta_\nu \leq b_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad (2)$$

ebenfalls mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung versehen; die charakteristischen Funktionen

$$\left\{ \begin{array}{l} y_\nu = \bar{y}_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n), \\ z = \bar{z}(x, \eta_1, \dots, \eta_n), \\ q_\nu = \bar{q}_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n), \end{array} \right\} \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad (3)$$

d. h. die Lösungen der charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dy_\nu}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial q_\nu}, \quad \frac{dq_\nu}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y_\nu} + \frac{\partial f}{\partial z} q_\nu, \quad \frac{dz}{dx} = f - \sum \frac{\partial f}{\partial y_\nu} q_\nu$$

mit den Anfangswerten

$$\bar{y}_\nu = \eta_\nu, \quad \bar{z} = \omega, \quad \bar{q}_\nu = \frac{\partial \omega}{\partial \eta_\nu}$$

an der Stelle  $x = 0$  mögen bei beliebigen  $\eta_\nu$  aus dem Bereich (2) für  $0 \leq x \leq c$  existieren (also insbesondere Punkte von  $\mathfrak{G}$  ergeben), und es sei

$$\frac{\partial(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)}{\partial(\eta_1, \dots, \eta_n)} \neq 0;$$

endlich sei  $Q_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n)$  die durch Eintragen von (3) in  $\frac{\partial f}{\partial q_\nu}$  entstehende Funktion.



Dann existiert das eindeutig bestimmte Integral  $z$  der Gleichung (1) mit dem Anfangswert  $z(0, \eta_1, \dots, \eta_n) = \omega(\eta_1, \dots, \eta_n)$  in einem Bereich

$$0 \leq x \leq c, \quad \varphi_\nu(x) \leq y_\nu \leq \psi_\nu(x), \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

falls  $\varphi_\nu, \psi_\nu$  stetig differenzierbare Funktionen sind, für die

$$\varphi_\nu(0) = a_\nu, \quad \psi_\nu(0) = b_\nu, \quad \varphi_\nu(x) < \psi_\nu(x)$$

gilt und außerdem

$$-Q_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n) < \frac{d\varphi_\nu}{dx}$$

an jeder Stelle  $x$  gilt, an der

$$\bar{y}_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n) = \varphi_\nu(x) \quad \text{und} \quad \varphi_\mu(x) \leq \bar{y}_\mu(x, \eta_1, \dots, \eta_n) \leq \psi_\mu(x)$$

für  $\mu \neq \nu$  ist, und

$$-Q_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n) > \frac{d\psi_\nu}{dx}$$

an jeder Stelle  $x$  gilt, an der

$$\bar{y}_\nu(x, \eta_1, \dots, \eta_n) = \psi_\nu(x) \quad \text{und} \quad \varphi_\mu(x) \leq \bar{y}_\mu(x, \eta_1, \dots, \eta_n) \leq \psi_\mu(x)$$

für  $\mu \neq \nu$  ist.

Kamke (Tübingen).

**Košliakov, N. S.:** Über eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Trav. Inst. math. Stekloff 9, 189—200 (1935) [Russisch].

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( p \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) - a p \theta = q \left( b \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right),$$

$p = \cos^\alpha \varphi (\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi_0)^\beta$ ,  $q = \cos^\alpha \varphi (\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi_0)^{\beta-1}$ ,  $a, b, c, \alpha, \beta$  sind konstante, mit gegebenen Randbedingungen bei  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , wird näherungsweise integriert. Methode: Trennung der Veränderlichen, Einführung elliptischer Funktionen ( $\sin \varphi = k \operatorname{sn} x$ ,  $\sin \varphi_0 = k$ ), Entwicklung derselben in Fourierreihen, Übergang zur neuen Veränderlichen  $t = \cos \frac{\pi}{2K} (x - K)$ , Auswertung von zwei ersten Gliedern der Entwicklungen der Eigenfunktionen und Eigenwerte in Potenzreihen

nach  $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ . Als Sonderfall wird die Gleichung der Schwingungen eines Fadens auf einer Kugeloberfläche betrachtet; zum Vergleich wird die erste Frequenz nach der Rayleighschen Methode ausgewertet.

W. Stepanoff (Moskau).

**Sobrero, L.:** Un teorema relativo ai sistemi differenziali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 317—325 (1935).

Es seien  $A = \sum_{r,s} a_{r,s} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}$ ,  $B = \sum_{r,s} b_{r,s} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}$  zwei Differentialoperatoren

mit konstanten Koeffizienten, die zueinander prim sind, d. h. keinen gemeinsamen Faktor enthalten. Für diese wird gezeigt: Dann und nur dann gibt es zu zwei Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  Funktionen  $\varphi(x, y)$  mit  $A\varphi = u$ ,  $B\varphi = v$ , wenn  $Bu = Av$  ist;  $\varphi$  ist eindeutig festgelegt, wenn man  $\varphi$  und gewisse Ableitungen von  $\varphi$  in einem Punkte vorschreibt.

Rellich (Marburg, Lahn).

**Michlin, S.:** Quelques remarques relatives à la solution des problèmes plans d'élasticité. Rec. math. Moscou 41, 408—414 (1934).

L'auteur simplifie et complète les résultats de ses notes précédentes (v. ce Zbl. 7, 306; 8, 359) sur les problèmes plans d'élasticité. Il simplifie l'équation intégrale obtenue auparavant et donne une solution approchée de cette équation. Il applique aussi ses méthodes pour les problèmes biharmoniques où le domaine donné est semi-infini.

Janczewski (Leningrad).

**Thom, A.:** Arithmetical solution of equations of the type  $V^4 \psi = \text{const.}$  Aeronaut. Res. Comm., Rep. Nr 1604, 1—12 (1934).

The author first give some short cuts to be used when working with the fields of  $\psi$  and  $\varrho$  (or  $V^2 \psi$ ) simultaneously. An example of infinitely slow flow of a viscous fluid along a channel 32 units wide is taken with baffles 8 units wide projecting from



either side at intervals apart of 32 units. A procedure to be adopted at the edge of a baffle was found after much trial, it introduces two types of errors but these roughly neutralize one another. — The method is extended so as to give a solution of  $V^6\psi = \text{const}$  and to the equations of steady viscous flow when the quadratic terms are retained. A practicable solution can be obtained by using 9 and 16 squares. Mention is made also of a method developed for four squares and use extensively by Sengupta. Diagrams are given showing the curves  $\psi = \text{const}$ ,  $\varrho = \text{const}$  in some cases for which calculations have been made.

H. Bateman (Pasadena).

**Sobrero, L.: Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella fisica-matematica.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 448—454 (1935).

In dem System  $Au + Bv = 0$ ,  $A'u + B'v = 0$  bedeuten  $A, B, A', B'$  Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten in  $x, y$ , also  $A = \sum_{r,s} a_{r,s} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}, \dots$

Gefragt wird nach einem „Potential“  $\varphi(x, y)$ , für das mit geeigneten Konstanten  $\alpha_{r,s}, \beta_{r,s}$  gilt

$$u = \sum_{r,s} \alpha_{r,s} \frac{\partial^{r+s} \varphi}{\partial x^r \partial y^s}, \quad v = \sum_{r,s} \beta_{r,s} \frac{\partial^{r+s} \varphi}{\partial x^r \partial y^s}.$$

Setzt man  $u = -B\varphi, v = A\varphi$ , so muß  $\varphi$  der Gleichung genügen  $(B'A - A'B)\varphi = 0$ . Anwendung auf Gleichungen der Elastizitätslehre. Rellich (Marburg, Lahn).

**Lévy, Paul: Sur une forme tensorielle des équations aux dérivées fonctionnelles des fonctions de Green et de Neumann.** C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1723—1725 (1935).

Soient  $g(A, B)$  et  $\gamma(A, B)$  la fonction de Green et la fonction de Neumann relatives à un domaine borné avec la frontière  $S$ . On peut écrire les formules de M. Hadamard (qui donnent les variations de ces fonctions lorsque la frontière se déforme) dans la forme suivante:

$$\omega \delta \vec{U}(A, B) = \int_S \vec{U}(A, M) \vec{U}(M, B) \delta n \, dS. \quad (1)$$

Ici  $\omega$  représente  $2\pi$  dans le cas du plan et  $4\pi$  dans le cas de l'espace et

$$\vec{U}(A, B) = -\text{grad}_A \text{grad}_B g(A, B),$$

ou

$$\vec{U}(A, B) = \text{grad}_A \text{grad}_B \gamma(A, B).$$

La Note contient une courte discussion des propriétés générales de l'équation (1) et de quelques équations modifiées. A. Kolmogoroff (Moskau).

### Spezielle Funktionen:

**Titchmarsh, E. C.: A discontinuous integral.** J. London Math. Soc. 10, 89—91 (1935). Two new proofs are given of the formula

$$\int_0^\infty \frac{\chi(ax)\chi(bx)}{x^2} dx = \min(a, b) \quad (a, b > 0),$$

where

$$\chi(x) = \int_0^x t^{\frac{1}{2}} J_{\nu}(t) dt \quad (\nu \geq \frac{1}{2}).$$

The formula is of importance in the theory of Hankel transforms. W. N. Bailey.

**Mehrotra, Brij Mohan: Self-reciprocal functions.** Tôhoku Math. J. 40, 451—485 (1935).

In this paper some preliminary theorems are given concerning integrals that are summable  $(C, r)$ . Then follow several theorems concerning functions which are self-reciprocal in the Hankel transform. For example it is shown that, if  $f(x)$  is its own cosine transform in an extended sense and satisfies various other conditions, then  $f(x)$  is of the form

$$\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \sqrt{t} J_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2} x^2 t) \psi(t) dt,$$

where  $\psi(t) = \psi(1/t)$ , the integral being a mean-square integral. Under other conditions  $f(x)$  is of the form

$$\frac{1}{2} \sqrt{x} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \psi(t) J_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2} x^2 t) dt,$$

where  $\psi(t)$  satisfies the same relation as before. Theorems of a converse type are given, those for cosine transforms being considered in detail. The corresponding results for the Hankel transform are obtained formally, but are not considered in detail.

W. N. Bailey (Manchester).

**Stroganoff, W.:** On the asymptotic expansion of the Bessel function with purely imaginary argument. Trav. Inst. math. Stekloff 9, 223—232 (1935).

The function  $J_\nu(ai)$  is expressible in terms of the integral  $\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-at} dt$  where  $a > 0$ . The asymptotic expansion of this integral is

$$\sum_{s=1}^n \frac{B_s}{(2a)^{s+\nu-\frac{1}{2}}} + R_n(2a, \nu), \text{ where } B_s = \frac{\Gamma(s-\nu-\frac{1}{2}) \Gamma(s+\nu-\frac{1}{2})}{\Gamma(s) \Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}.$$

It is shown that the equation  $R_n(2a, \nu) = 0$  has a root given by

$$2a = n + \sqrt{2n} p(\nu) + B_1(\nu) + \frac{B_2(\nu)}{\sqrt{n}} + \frac{B_3(\nu)}{n} + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

the values of  $p(\nu)$ ,  $B_1(\nu)$ ,  $B_2(\nu)$ ,  $B_3(\nu)$  being given in terms of  $\nu$ . When  $\nu$  is an integer the formula for the root reduces to

$$2a = n - \frac{2}{3} + \left( \frac{437}{1620} - \nu^2 \right) \frac{1}{n} + O\left( \frac{1}{n^2} \right),$$

and when  $\nu = 0$  this formula reduces to one given by Stieltjes. W. N. Bailey.

**Meijer, C. S.:** Noch einige Integraldarstellungen für die Whittakersche Funktion. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 528—535 (1935).

Der Verf. beweist, daß die Funktion  $W_{k,m}(z^2)$  die folgenden Integraldarstellungen besitzt:

$$W_{k,m}(z^2) = -2ze^{\frac{z^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \{ J_{2m}(2zu) \sin(m-k)\pi + Y_{2m}(2zu) \cos(m-k)\pi \} u^{2k} du \quad (1)$$

$$= \frac{4ze^{\frac{z^2}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(u^2) \left\{ e^{\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi i} K_{2m}\left(2ze^{\frac{\pi i}{4}}\right) + e^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi i} K_{2m}\left(2ze^{-\frac{\pi i}{4}}\right) \right\} u^{2k} du \quad (2)$$

$$= \frac{4ze^{\frac{z^2}{2}}}{\pi i} \int_0^{\infty} \cos(u^2) \left\{ e^{\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi i} K_{2m}\left(2ze^{\frac{\pi i}{4}}\right) - e^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi i} K_{2m}\left(2ze^{-\frac{\pi i}{4}}\right) \right\} u^{2k} du. \quad (3)$$

In (2) und (3) wird  $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$  vorausgesetzt; in (1) ist  $\arg z$  beliebig. Es wird ferner angenommen:

$$|\Re(m)| - \Re(k) < \frac{1}{2} \text{ in (1) und in (3)}$$

$$|\Re(m)| - \Re(k) < \frac{3}{2} \text{ in (2).}$$

Hieraus ergeben sich neue Integraldarstellungen für die Funktion  $K_\nu(z^2)$ , wegen

$$K_\nu(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} W_{0,\nu}(2w)$$

und teils neue, teils schon bekannte Integraldarstellungen für die parabolische Zylinderfunktion  $D_n(z)$ , wegen

$$D_n(z) = 2^{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}(\frac{1}{2} z^2).$$

S. C. van Veen (Dordrecht).



**Krishnaswami Ayyangar, A. A.:** A general formula for the moments of the hypergeometrical series. *J. Indian Math. Soc., N. s.* **1**, 109—114 (1934).

Starting with Pearson's recurrence formula for the moments about the mean of a hypergeometrical distribution this paper gives the explicit expression for the  $s$ -th such moment as an  $(s-1)$ -st order determinant multiplied by a simple factor. The special forms for the binomial and the Poisson distributions are given; a recurrence formula for the determinant is developed, along with the explicit values of the coefficients needed in writing out the moments up to the fifth order. *C. C. Craig.*

**Svetlov, A.:** On the asymptotic expansions of the confluent-hypergeometric functions. *Trav. Inst. math. Stekloff* **9**, 201—221 (1935).

Der Verf. untersucht das Restglied in der asymptotischen Entwicklung der Whittakerschen Funktion  $W_{k,m}(z)$ , wo  $z$  beliebig komplex ist, für große Werte von  $|z|$ , und  $p + m - k + \frac{1}{2} > 0$ , wo  $p$  die Zahl der Glieder der asymptotischen Entwicklung vorstellt, unter der Voraussetzung, daß  $k$  und  $m$  reell sind. — Aus der klassischen Integraldarstellung der Funktion  $W_{k,m}(z)$  (Whittaker-Watson, *Modern Analysis*, S. 340) findet er für das Restglied

$$R_p = \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2} - n)}{\Gamma(p) z^p} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{p+\nu-\frac{1}{2}} \frac{\left(1 + \frac{t}{z}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt d\zeta}{(1+\zeta)^{p+\frac{1}{2}-n} \left(1 + \frac{t}{z} + \zeta\right)^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \begin{pmatrix} \nu = m - k \\ n = m + k \\ p + \nu + \frac{1}{2} > 0 \end{pmatrix}$$

Nach vielen Umarbeitungen findet er für

$\nu + \frac{1}{2} > \mu$ ;  $\sigma = |z| - p > \mu$ ;  $|\arg z| < \pi$  ( $\mu$  ist eine beliebige reelle Zahl  $> -p$ ),

$$R_p = \sqrt{2\pi} \frac{\omega^p}{1+\omega} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2} - n)}{\Gamma(p)} e^{-|z|} \frac{|z|^{\nu+\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{b}{p} + O(p^{-2}) \right\},$$

wo:

$$\omega = \frac{|z|}{z}; \quad b = \frac{1}{2} \left\{ \sigma^2 - 2\sigma\nu + \nu^2 - \sigma - \frac{1}{12} + \frac{2\omega}{1+\omega} \left( \frac{\omega}{1+\omega} + \sigma + n - \nu \right) \right\}.$$

Wenn  $p > |n - \frac{1}{2}|$  ist und  $\nu + \frac{1}{2} \neq$  eine negative ganze Zahl, wird dieses Ergebnis vereinfacht zu:

$$R_p = \sqrt{2\pi} \frac{\omega^p}{1+\omega} \cdot e^{-|z|} \frac{|z|^{\nu+\frac{1}{2}}}{p^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{b - \frac{1}{8}}{p} + O(p^{-2}) \right\}.$$

Der Verf. gibt mehrere Anwendungen auf unvollständige Gammafunktionen und ihre Sonderfälle (Schlömilsche Funktion, Integrallogarithmus, Integralkosinus und -sinus, Fehlerfunktion), Besselsche Funktionen  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  ( $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$ ), Hermite'sche Funktionen usw. *S. C. van Veen (Dordrecht).*

## Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

**Radziševskij, L. P.:** Zur allgemeinen Theorie der linearen Funktionalgleichungen. *C. R. Acad. Sci. URSS* **2**, 11—14 u. dtsch. Text 13—14 (1935) [Russisch].

Verf. bemerkt, daß, wenn in der linearen Funktionalgleichung  $x - \lambda T(x) = f$ , die lineare beschränkte Transformation  $T(x) = U(x) + V(x)$  ist, wo  $U(x)$  vollstetig ist und  $V(x)$  die Schranke  $M$  besitzt, die determinantenfreien Sätze Fredholms mindestens innerhalb des Kreises  $|\lambda| < 1/M$  gelten. Diese Bemerkung ist unter anderem schon in einer Arbeit des Ref. in *Bull. Amer. Math. Soc.* **37**, 198 (1931) zu finden (dies. Zbl. **1**, 339 [Hildebrandt]). *Hildebrandt (Ann Arbor).*

**Steen, S. W. P.:** Note on transforms. *J. London Math. Soc.* **10**, 151—160 (1935).

The author proves the following theorem, which relates to unitary transformations in Hilbert space (in particular to generalizations of the Fourier transformation): if  $f_\lambda(x)$ , where  $x$  is in a measurable set  $E$  and  $-\infty < \lambda < +\infty$ , has the properties

$$(I) \int_E \Delta_1 f_\lambda(x) \overline{\Delta_2 f_\lambda(x)} dx = \int_E |\Delta_{12} f_\lambda(x)|^2 dx = \Delta_{12} \varrho(\lambda) \text{ and } (II) \int_E f(x) \overline{\Delta f_\lambda(x)} dx = 0$$

for all  $\Delta$  implies  $f(x) = 0$  when  $f(x)$  is in  $L_2(E)$  [the notations  $\Delta$  and  $\Delta F(\lambda)$  are used to indicate an interval  $(a, b)$  and the difference  $F(b) - F(a)$ , and  $\Delta_{12} = \Delta_1 \Delta_2$ ],

then  $f_1(x)$  has the property (III)  $\int_E f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_f(\lambda) \overline{d\sigma_g(\lambda)}}{d\rho(\lambda)}$  for all  $f$  and  $g$  in  $L_2(E)$ ,

the integral being a Hellinger integral in which  $\Delta\sigma_f(\lambda) = \int_E f(x) \overline{\Delta f_1(x)} dx$ ; and, con-

versely, (III) implies (I) and (II). He shows that this theorem includes as a special case a recent result of Watson [Proc. London Math. Soc. (2) 35, 156—199 (1933); this Zbl. 7, 64] and gives a generalization of the theorem quoted above.

M. H. Stone (Cambridge, Mass.).

● Neumann, J. von: Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators. (Actualités scient. et industr. Nr. 229. Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. XIII.) Paris: Hermann & Cie. 1935. 20 pag. Frs. 7.—

In this monograph, the author proves the following four theorems: I. If  $A$  is a self-adjoint (hypermaximal) operator in Hilbert space and  $\epsilon$  a positive number, then there exists a self-adjoint operator  $X$  with norm less than  $\epsilon$  such that  $A + X$  has a pure point spectrum ( $X$  is thus completely continuous, and the spectra of  $A$  and  $A + X$  have the same concentration points); II. If the self-adjoint operators  $A$  and  $B$  have spectra with the same concentration points, then there exist a unitary operator  $U$  and a completely continuous operator  $X$  such that  $A = UBU^{-1} + X$  ( $X$  cannot be restricted to any narrower operator class); III. If the self-adjoint operator  $B$  has a spectrum with  $O$  as a concentration point, then there exists in  $\mathfrak{L}_2(-\infty, +\infty)$  (the Hilbert space of measurable functions  $f(x)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , with integrable absolute squares) an integral operator  $A$  of Carleman type which is unitary equivalent to  $B$ ; IV. If  $A$  is a self-adjoint integral operator of Carleman type in  $\mathfrak{L}_2(-\infty, +\infty)$ , then  $O$  is a concentration point of its spectrum. A real number is here called a concentration point of the spectrum if it is a characteristic value of infinite multiplicity, if it is a limit point of the point-spectrum, or if it is a point of the continuous spectrum. The first theorem is a generalization of a result of Weyl [Rend. Circ. mat. Palermo 27, 373—392 (1909)]; it is proved by a construction based on the spectral resolution of  $A$ . In view of I, it is sufficient to prove II for the case where  $A$  and  $B$  have pure point spectra, easily treated by means of an elementary construction. Similarly, it is easy to reduce III to the case where  $B$  has a pure point spectrum; and in this case  $A$  is found by direct construction. Finally, IV, which was already known from Carleman's spectral theory, is established by elementary devices. The author observes that corresponding results obtain for integral operators in other Hilbert spaces  $\mathfrak{L}_2$ .

M. H. Stone (Cambridge, Mass.).

Murray, F. J.: Linear transformations between Hilbert spaces and the application of this theory to linear partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 301 bis 338 (1935).

This paper falls into two parts: the first (§§ 1—5) dealing with abstract transformations from one Hilbert space,  $\mathfrak{H}_1$ , to another,  $\mathfrak{H}_2$ ; and the second (§§ 6—10)

applying the general theory to the study of the equation  $L(u) \equiv \sum_{i+j=0}^2 A_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = v$

in  $S$ , with or without the boundary condition  $Q(u) \equiv b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 u = w$  on  $B$ , where the  $A_{ij}$  and  $b_i$  are bounded measurable functions,  $S$  is a region, and  $B$  is its boundary. In the first part, following a device introduced by J. v. Neumann in the case  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$  [Ann. of Math. (2) 33, 294—310 (1932); this Zbl. 4, 216], the author associates with a transformation  $T$  from  $\mathfrak{H}_1$  to  $\mathfrak{H}_2$  the class  $\mathfrak{T}$  of ordered pairs  $(f_1, g_2)$  in the product space  $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$  and the class  $\mathfrak{T}^{-1}$  of inversely ordered pairs  $(g_2, f_1)$ .



in  $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_1$ , with  $g_2 = T f_1$ . The elementary discussion of linear transformations, their inverses, extensions, and adjoints follows Stone, "Linear Transformations in Hilbert Space", Chapter II (New York, 1932) and the cited paper of v. Neumann. For instance, two transformations  $T_1$  and  $T_2$ , the first from  $\mathfrak{H}_1$  to  $\mathfrak{H}_2$  and the second from  $\mathfrak{H}_2$  to  $\mathfrak{H}_1$ , are said to be perpendicular if the sets  $\mathfrak{T}_1^{-1}$  and  $\mathfrak{T}_2$  are orthogonal in  $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_1$ ; and two such transformations are said to be adjoint if  $T_1$  and  $-T_2$  are perpendicular. The following result (Theorem II) is fundamental in the second part of the paper: if  $T$  is a bounded linear transformation defined over  $\mathfrak{H}_1$ , with range dense in  $\mathfrak{H}_2$ , then its adjoint  $T^*$  exists, is bounded, is defined over  $\mathfrak{H}_2$ , and has an inverse; furthermore, if  $\{\psi_i\}$  and  $\{\varphi_i\}$  are complete orthonormal sets in  $\mathfrak{H}_1$  and  $\mathfrak{H}_2$  respectively, if  $\{\chi_i\}$  is the orthonormal set in  $\mathfrak{H}_1$  obtained from  $\{T^*\varphi_i\}$  by the Schmidt process, and if  $\mathfrak{M}_1$  is the closed linear manifold specified by the equation  $Tf = 0$ , then  $\{\chi_i\}$  determines  $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_1$ , an element  $g$  is in the range of  $T$  if and only if  $\sum_{i=1}^{\infty} |(g, T^{*-1}\chi_i)|^2 < \infty$ , and, when this condition is satisfied, the element  $f = \sum_{i=1}^{\infty} (g, T^{*-1}\chi_i)\chi_i$  is a solution of the equation  $Tf = g$ . The author extends a factorization theorem of v. Neumann, establishing under very general conditions the relations  $T = WB = CW$ ,  $T^* = BW^* = W^*C$  where  $B = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$  and  $C = (TT^*)^{\frac{1}{2}}$  are self-adjoint transformations in  $\mathfrak{H}_1$  and  $\mathfrak{H}_2$  respectively and  $W$  and  $W^*$  are isometric. In § 5, he introduces the concept of "breakage": a projection  $F$  in  $\mathfrak{H}_1$  is said to break  $T$  if there exists a projection  $F'$  in  $\mathfrak{H}_2$  such that  $TF \supseteq F'T$ . This concept is discussed at length; and, with the help of the factorization theorem and the spectral resolution of  $B$ , it is shown that there exists a set of mutually orthogonal closed linear manifolds  $\mathfrak{M}_i$  which determines  $\mathfrak{H}_1$  and which is carried by  $T$  into a set of mutually orthogonal linear manifolds in  $\mathfrak{H}_2$ , the transformation  $T$  being bounded in each  $\mathfrak{M}_i$  and completely characterized by its behavior over the set  $\{\mathfrak{M}_i\}$ . In the second part of the paper, the author shows that a certain class of functions  $f(x, y)$  defined over  $S$  is a Hilbert space  $\mathfrak{B}$

when the inner product is defined as  $(f, g) = \sum_{i+j=0}^2 \iint_S \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{i+j} g}{\partial x^i \partial y^j} dS$ , and that

the transformation from  $\mathfrak{B}$  to  $\mathfrak{L}_2(S)$  defined by the formal operator  $L$  described above is bounded. A direct application of Theorem II then gives information concerning the solution of the equation  $L(u) = v$ . This and similar results relative to the equation  $L(u) = 0$  constitute a generalization of the methods of Ritz [J. f. Math. **135**, 1—61 (1908—09)]. Next it is established under suitable restrictions on the boundary  $B$  that the functions in  $\mathfrak{B}$  assume boundary values  $f(P)$ ,  $f_x(P)$ ,  $f_y(P)$ , in an appropriate sense, in the Hilbert space  $\mathfrak{L}_2(B)$ , and that the transformation from  $\mathfrak{B}$  to  $\mathfrak{L}_2(B)$  defined by the formal boundary operator  $Q$  is bounded. Suitable applications of Theorem II then yield a method for discussing the solution of the boundary value problem  $L(u) = v$ ,  $Q(u) = w$ , where  $v$  is in  $\mathfrak{L}_2(S)$  and  $w$  in  $\mathfrak{L}_2(B)$ . *M. H. Stone.*

**Maeda, Fumitomo:** Theory of vector valued set functions. J. Sci. Hiroshima Univ. A **4**, 57—91 (1934).

It is well known that the theory of integration inevitably plays an important rôle in the analysis of self-adjoint and normal transformations in Hilbert space; and it is generally realized that a preliminary development of appropriate types of abstract integral can be of advantage in such an analysis, even though the Radon-Stieltjes integral has proved adequate in the problems so far encountered. The author of the present paper investigates an approach along the lines suggested. He discusses completely-additive vector-valued set functions  $q(U)$ , generalized resolutions of the identity  $E(U)$ , and integrals with respect to them, the set  $U$  being taken as an arbitrary Borel set in a fixed Borel set  $V$  in a semi-compact metric space. The value of  $q(U)$  is an element in a fixed Hilbert space; and  $q(U)$  has, by definition, the properties: (1)  $(q(U_1), q(U_2)) = 0$  when  $U_1$  and  $U_2$  are disjoint; (2)  $q(\sum U_n) = \sum q(U_n)$  if the

sets  $U_n$  are mutually disjoint. The real-valued completely additive set-function  $\sigma(U) = |q(U)|^2$  is called the base of  $q(U)$ . Analogously, the value of  $E(U)$  is a self-adjoint transformation defined over the entire Hilbert space; and  $E(U)$  has, by definition, the properties: (1)  $E(U_1)E(U_2) = E(U_1U_2)$ ; (2)  $E(\sum U_n) = \sum E(U_n)$  when the sets  $U_n$  are mutually disjoint; (3)  $E(V) = I$ ; (4)  $E(U) = 0$  when  $U$  is void [a consequence of (2)]. The relation  $(q(U_1), q(U_2)) = \sigma(U_1U_2)$  sets up an analogy between vector-valued set functions and sets of orthogonal elements in Hilbert space which is further strengthened by the results of the paper; indeed, in the special case where  $V$  is the class of positive integers, it is easily seen that  $q(U)$  can be correlated in a unique manner with a set of orthogonal elements. The integral with respect to  $q(U)$  of a complex-valued function  $f$  with  $V$  as its domain is defined first in the case where  $f$  is a bounded real function of Baire, by the usual Lebesgue process; and is then extended to the case where  $f$  is measurable with respect to the base  $\sigma$  and the integral  $\int_V |f|^2 d\sigma$  exists in the sense of Radon. Some of the most important results

concerning this integral are: an element  $f$  in Hilbert space belongs to the closed linear manifold determined by the elements  $q(U)$ ,  $\mathfrak{M}(q)$ , if and only if  $f = \int_V f d q$  where

$\int_V |f|^2 d\sigma$  exists, the function  $f$  being determined in terms of the element  $f$  as the "generalized derivative" of the numerical set-function  $(f, q(U))$  with respect to the base  $\sigma(U)$ ; and the space  $\mathfrak{M}(q)$  is isomorphic to the Hilbert space  $\mathfrak{L}_2(\sigma)$  by virtue of the relation  $(f, g) = \int_V f \bar{g} d\sigma$ . A set of completely-additive vector set-functions

$\{q_n(U)\}$  is said to be a complete orthonormal set if the manifolds  $\mathfrak{M}(q_n)$  are mutually orthogonal and together determine the Hilbert space in which they lie. The following connection with generalized resolutions of the identity is established: each of the set-functions  $q_n(U) = E(U) f_n$ , where  $\{f_n\}$  is a suitably chosen orthonormal set of elements in Hilbert space, is a completely-additive set-function and together they constitute a complete orthonormal set of such functions; and, conversely, if  $\{q_n(U)\}$  is a complete orthonormal set of set-functions, then there exist a generalized resolution of the identity  $E(U)$  and an orthonormal set of elements  $f_n$  in Hilbert space such that  $q_n(U) = E(U) f_n$ . The paper closes with a discussion of the transformation  $T$  defined by the relation  $Tf = \int_V f d(E(U)f)$ , the integral being of the type previously intro-

duced. The author does not give a direct discussion of the integration of  $f$  with respect to  $E(U)$  and hence does not arrive at the corresponding relation  $T = \int_V f d E(U)$ ,

which suggests itself as the most natural formal definition of the transformation  $T$ . On the whole, there is a close parallel between the results of the present paper and the known results in the theory of Hilbert space, their scope being approximately that embraced in Chapter VI of the reviewer's "Linear Transformations in Hilbert Space" (New York, 1932).

*M. H. Stone* (Cambridge, Mass.).

**Maeda, Fumitomo: Theory of vector valued set functions. II.** J. Sci. Hiroshima Univ. A 4, 141—160 (1934).

In this paper, the author discusses the unitary equivalence of generalized resolutions of the identity  $E(U)$  by means of his theory of vector-valued set-functions (see the prec. ref.). The results are parallel to those of Chapter VII, § 1 and § 2, of the reviewer's "Linear Transformations in Hilbert Space" (New York, 1932). A typical fundamental theorem may be stated as follows: in order that the set-functions  $q_1(U) = E(U) f_1$  and  $q_2(U) = E(U) f_2$  have the property  $\mathfrak{M}(q_1) = \mathfrak{M}(q_2)$  it is necessary and sufficient that (1) the bases  $\sigma_1(U)$  and  $\sigma_2(U)$  be absolutely continuous with respect to one another, and (2)  $f_2$  belong to  $\mathfrak{M}(q_1)$ .

*M. H. Stone* (Cambridge, Mass.).



## Funktionentheorie:

**Priwaloff, I.: Sur un problème limite de la théorie des fonctions analytiques.** Rec. math. Moscou **41**, 519—526 u. franz. Zusammenfassung 526 (1935) [Russisch].

Given a simple closed rectifiable curve  $C(z = z(t), A \leq t \leq B)$  and two functions  $a(t)$  and  $b(t)$  in  $(A, B)$ , the author studies the conditions for the existence of a summable function  $f(z)$  on  $C$  such that  $\varphi_2(t) = a(t) \varphi_1(t) + b(t)$  almost everywhere in  $(A, B)$ , where  $\varphi_1(t)$  and  $\varphi_2(t)$  are the boundary values of the Cauchy integral of  $f(z)$ , taken from the interior and from the exterior of  $C$  respectively. *Saks.*

**Miranda, Carlo: Un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1823 (1935).

Beweisskizze für folgenden Satz: Eine Familie regulärer Funktionen  $f(z)$  in einem Gebiete  $G$  ist dort normal, wenn neben einem gemeinsamen Ausnahmewert  $a$  aller  $f$  noch ein gemeinsamer Ausnahmewert  $b \neq 0$  für die  $k$ -ten Ableitungen ( $k$ -fest) aller  $f$  vorhanden ist. Dieser Satz ist von Bureau früher unter Einschränkungen gefunden (dies. Zbl. **1**, 398), die der Verf. nunmehr als unwesentlich beseitigt. *Ullrich.*

**Valiron, Georges: Sur une généralisation du théorème de Schottky.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1825—1828 (1935).

En reprenant son étude d'une fonction holomorphe et de ses dérivées dans le voisinage de certains points, étude qui fut poursuivie par M. A. Bloch, l'A. complète tout d'abord le théorème de ce dernier. Ceci lui permet de démontrer le théorème suivant: Si  $F(z)$  est hol. pour  $|z| < 1$ , et  $F(z) \neq 0$  dans ce cercle, si l'équation

(1)  $\sum_{j=0}^q a_j F^{(j)}(z) = 1$ , où  $\sum_{j=0}^q |a_j|^2 \neq 0$ , n'a que  $m$  racines au plus et si  $A^{-1} < |F(0)| < A$ ,

( $A \geq 1$ ), on a  $\left| \arg \frac{F(z)}{F(0)} \right| + \left| \log |F(z)| \right| < (1 + \log A) \theta(|a_0|, \dots, |a_q|, |z|, m)$ ,  $\theta$  dépendant des variables précisées. Ces recherches conduisent l'A. au th. suivant: Si les  $F(z)$  sont hol. dans  $D$ , si  $F(z) \neq 0$ , (1) n'ayant que  $m$  racines au plus, alors elles constituent une famille normale. Ceci généralise un th. de M. Miranda [C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1823 (1935); voir le réf. préc.]. Le cas des fonctions méromorphes est aussi traité. *Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).*

**Pfluger, A., and G. Pólya: On the power series of an integral function having an exceptional value.** Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 153—155 (1935).

The density of an infinite sequence  $a_0, a_1, a_2, \dots$  is defined as the limit of  $q_n/n$  for  $n \rightarrow \infty$ , where  $q_n$  denotes the number of elements  $a_k$  with  $k \leq n$  which do not vanish, provided the limit exists. The authors show that if  $p$  is a positive integer and

$$G(z) = e^{zp} F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

where  $F(z)$  is an entire (= integral) function either of order less than  $p$ , or of the minimum type of order  $p$ , then the sequence  $c_k, c_{k+p}, c_{k+2p}, \dots$  has the density 1, unless all its terms are zero. It follows in particular, that if an entire function of order  $p$  has a Borel exceptional value, then the coefficients of its Maclaurin series have a density which is a multiple of  $1/p$ . It is enough to prove the theorem for  $p = 1$ ,  $k = 0$  for which case the authors give two different proofs. *E. Hille.*

**Cartwright, Mary L.: On the directions of Borel of functions which are regular and of finite order in an angle.** Proc. London Math. Soc., II. s. **38**, 503—541 (1935).

Verf. behandelt einige Grenzfälle früherer Untersuchungen (vgl. — auch wegen der Bezeichnungen — dies. Zbl. **10**, 404), in denen nunmehr auch für Winkel gleich  $\pi/\varrho$  Aussagen über Borelsche Richtungen ermöglicht sind. Ist  $f(z)$  ganz und von der verschärften Ordnung  $\varrho(r)$  im Winkelraum  $|\vartheta| \leq \pi/2\varrho < \alpha$ , und gilt dort für den Strahlentypus  $h(\vartheta) = A \cos \varrho \vartheta + B \sin \varrho \vartheta$ , so bleibt die Nullstellenanzahl von  $f$  gleich  $o(r^{\varrho(r)})$  in jedem beliebig wenig schmalern Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{\varrho} - \varepsilon$ . Speziell für  $B = 0$ , also

$$h(\vartheta) = h(0) \cos \varrho \vartheta \quad \text{für} \quad |\arg z| \leq \pi/2\varrho, \quad (*)$$

gibt es im Innern dieses Winkelraums überhaupt keine Borelsche Richtung zu  $\varrho(r)$ . Und umgekehrt, hat  $f(z)$  keine solche Richtung mit  $|\arg z| < \pi/2\varrho$ , dann gilt (\*). Diese Hauptsätze gestatten mehrere für den Spezialforscher beachtenswerte Anwendungen. Ulrich (Göttingen).

**Selberg, Henrik L.: Über ein funktionentheoretisches Seitenstück eines elementaren algebraischen Satzes von Gauß.** Comment. math. helv. 7, 171—177 (1935).

Vermöge einer gegen  $\infty$  wachsenden Funktion  $S(r)$  wird eine Klasseneinteilung der meromorphen Funktionen eingeführt,  $A = \sum f_k(z)$ ,  $B = \sum g_k(z)$  aus nichtäquivalenten Funktionen mit wenig Nullstellen (gemessen an  $S(r)$ ) aufgebaut, und dann ein Teilbarkeitsbegriff für solche Summen festgelegt. Es handelt sich dann um den Satz: Teilen  $F, G$  die Summen  $A$  bzw.  $B$ , so teilt  $F \cdot G$  das Produkt  $A \cdot B$ . Zum Beweise (wie schon in den Definitionen) werden die Hauptergebnisse der Wertverteilungslehre benutzt. Der Satz ist eine weite Verallgemeinerung von Aussagen im Bereich der Borelschen Identitäten. Ulrich (Göttingen).

**Hiong, King-Lai: Some properties of the meromorphic functions of infinite order.** Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 1—25 (1935).

$\varrho(r)$  heiße eine „Ordnung“ einer mer. Funktion  $f(z)$  unendlicher Ordnung, wenn es nicht abnimmt und für jedes  $\delta > 0$  die Ungleichungen  $T(r, f) < r^{\varrho(r)(1+\delta)}$  für alle bzw.  $> r^{\varrho(r)(1-\delta)}$  für gewisse  $r \rightarrow \infty$  erfüllt sind. Verf. nennt dann  $U(r) = r^{\varrho(r)}$  die Adjungierte von  $f$ . Er entwickelt einen Kalkül mit Ordnungen, verallgemeinert den Hadamardschen Satz vom Minimalbetrag und zeigt, daß  $f$  und  $f'$  von gleicher „Ordnung“ sind. Das auch für meromorphe Funktionen im Einheitskreis. Ulrich (Göttingen).

**Macintyre, A. J.: A theorem concerning meromorphic functions of finite order.** Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 282—294 (1935).

$f(z)$  sei eine meromorphe Funktion von endlicher positiver Ordnung, deren Pole positive Defekte haben. Es läßt sich eine Folge von Kreisen  $C_\nu$  mit den Mittelpunkten  $\xi_\nu$  bestimmen, in welchen  $f(z)$  verhältnismäßig „flach“ verläuft, d. h. es gilt eine Ungleichung der Form

$$1 - \varepsilon_\nu < \frac{\log |f(z)|}{\log |f(\xi_\nu)|} < 1 + \varepsilon_\nu.$$

Die Halbmesser der Kreise hängen in bestimmter Weise von der Ordnung der Funktion ab. L. Ahlfors (Helsingfors).

● **Julia, Gaston: Leçons sur la représentation conforme des aires multiples connexes. Leçons recueillis et rédig. par Georges Bourion et Jean Leray. (Cahiers scient. Publiés par Gaston Julia. Fasc. 14.)** Paris: Gauthier-Villars 1934. VI, 95 p. et 36 Fig. Frs. 28.—

Das vorliegende Bändchen stellt eine Fortsetzung der Juliaschen „Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes“ (Bd. 8 derselben Sammlung) dar. — Kurze Inhaltsangabe: Nach einem einleitenden, historische Bemerkungen enthaltenden Kapitel I wird im folgenden Kapitel mit Hilfe des Koebeschen Schmiegungsverfahrens die Fundamentalabbildung eines beliebigen endlich vielfach zusammenhängenden schlichten Bereiches  $A$  auf einen Kreis gewonnen. Im Kapitel III wird die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen des Fundamentalbereiches in sich studiert. Ferner wird mit wesentlicher Benutzung der Fundamentalabbildung das Dirichletsche Problem für  $A$  gelöst. Mit Hilfe dieser Ergebnisse werden im nächsten Kapitel die Abbildungen von  $A$  auf die Normalbereiche von Schottky-Koebe und Hilbert konstruiert. In den beiden letzten Kapiteln wird die De la Vallée-Poussinsche Abbildung auf einem Bereich dargestellt, der von lauter zu einem und demselben Polynom gehörigen Cassinischen Kurven begrenzt ist (vgl. Ann. École norm. 1930), und es werden die wichtigen Beiträge besprochen, die Julia zu dieser Fragestellung gegeben hat (vgl. dies. Zbl. 3, 261). K. Löwner (Prag).

**Rengel, Ewald: Ein neues Schlitztheorem der konformen Abbildung.** Jber. Deutsch. Math.-Verein. 45, 83—87 (1935).

Bei einer eindeutigen schlichten Abbildung des Ringes  $r < |z| < R$  mögen die Randkreise  $|z| = r$  und  $|z| = R$  in  $S_1$  bzw.  $S_2$  übergehen. Ferner sei  $g$  eine Gerade, welche  $S_1$  und  $S_2$  schneidet und von einem Schnittpunkt  $P$  mit  $S_1$  aus gerechnet in



einer bestimmten Richtung durchlaufen wird. Hierbei sei  $\varepsilon_1$  der erste Treffpunkt mit  $S_2$  und vordem  $\varepsilon_4$  der letzte mit  $S_1$ . Sodann sei wieder  $\varepsilon_2$  der erste Treffpunkt mit  $S_1$  und vorher  $\varepsilon_3$  der letzte mit  $S_2$ . Verf. bestimmt das Minimum des Doppelverhältnisses  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ ; es wird erreicht für die Schlitzabbildung, deren Schlitz zwei Intervalle einer und derselben Geraden  $g$  sind. — Der Grenzfall  $r = 0$  ist mit einem Satze des Ref. [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **32**, 45 (1923)] identisch.

*G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

**Grötzsch, Herbert:** Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. III. Mitt. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **23**, 434—444 (1934).

Der Bereich  $\mathfrak{B}$  der  $z$ -Ebene enthalte die Punkte  $z = 0$  und  $z = \infty$ , nicht aber den Punkt  $z = 1$ . Eine schlichte Abbildung  $w = f(z)$  von  $\mathfrak{B}$  heiße normiert, wenn  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = \infty$ ,  $|f'(\infty)| = 1$  ist und wenn ferner das Bild  $R'$  der Randkomponente  $R$  von  $\mathfrak{B}$ , die  $z = 1$  von  $\mathfrak{B}$  abtrennt,  $w = 1$  vom Bildbereich trennt. In § 1 wird die Frage nach dem Maximum und Minimum von  $|f'(0)|$  bei normierten Abbildungen beantwortet. Die Extremalbereiche und Bereichstypen, die bereits in den beiden ersten Arbeiten dieser Serie aufgetreten sind. Beim Maximumproblem tritt unter Umständen ein ganzes Kontinuum von Extremalabbildungen auf, die Minimalabbildung dagegen ist stets eindeutig bestimmt. In § 2 wird die geometrische Struktur von  $R'$  bei gewissen der eben genannten Extremalbereiche untersucht. In § 3 werden Flächensätze vom Typus des folgenden bewiesen: Es sei  $\mathfrak{B}$  ein mindestens 3fach zusammenhängender Bereich, der  $z = 0, \infty, 1$  nicht enthält, und die Randkomponenten  $R_1, R_2, R_3$  von  $\mathfrak{B}$ , die die genannten Punkte der Reihe nach von  $\mathfrak{B}$  abschließen, seien paarweise verschieden. Eine Abbildung von  $\mathfrak{B}$  heiße jetzt normiert, wenn die Bilder  $R'_1, R'_2, R'_3$  von  $R_1, R_2, R_3$  der Reihe nach  $w = 0, \infty, 1$  vom Bildbereich trennen. Gesucht wird das Minimum des Flächeninhalts des Bildbereichs von  $\mathfrak{B}$ , wenn sämtliche im eben genannten Sinne normierten Abbildungen zur Konkurrenz zugelassen werden. Der Flächeninhalt ist aber nicht im gewöhnlichen euklidischen Sinne zu verstehen, sondern mit Hilfe gewisser Riemannscher Maßbestimmungen definiert. Eine von diesen ist von der Wahl von  $\mathfrak{B}$  abhängig, die anderen sind hiervon unabhängig. § 4 enthält einige Zusatzbemerkungen. (Vgl. dies. Zbl. **7**, 312; **8**, 319.)

*K. Löwner* (Prag).

**Elfving, Gustav:** Zur Flächenstruktur und Wertverteilung. Ein Beispiel. Acta Acad. Åboens. **8**, Nr 10, 1—13 (1935).

Die schlichte Abbildung der einfach-zusammenhängenden Riemannschen Fläche mit drei logarithmischen (und keinen anderen) Windungspunkten wird mit elementaren Mitteln hergestellt. Die Wertverteilung der erzeugenden meromorphen Funktion kann dann mit Hilfe eines Satzes von J. Wolff über die Winkelableitung bei Randabbildung ebenfalls sehr einfach behandelt werden. (Vgl. hierzu die allgemeine Theorie bei Nevanlinna und Ahlfors, dies. Zbl. **4**, 355ff., sowie Elfving, ebenda **10**, 363.)

*Ulrich* (Göttingen).

**Myrberg, P. J.:** Sur la détermination du type d'une surface riemannienne simplement connexe. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1818—1820 (1935).

Wir betrachten eine in der oberen Halbebene analytische, schlichte Funktion  $f(z)$ , die auf der positiven und negativen Hälfte der reellen Achse genau dieselben Werte annimmt. Durch sie wird eine konforme Abbildung der Halbebene auf einen von einem Einschnitt begrenzten Bereich vermittelt. Zwei Fälle sind möglich: entweder konvergiert der Einschnitt gegen den unendlich fernen Punkt (parabolischer Fall) oder gegen eine geschlossene Kurve, die mit der Peripherie  $|z| = 1$  identifiziert werden kann (hyperbolischer Fall). Offenbar gehört zu dem parabolischen Fall eine verhältnismäßig symmetrische Verteilung der Werte auf der reellen Achse, während der hyperbolische Fall zu einer asymmetrischen Verteilung führt. Der Verf. beweist als wichtiges Lemma einen Satz, mit Hilfe dessen aus einer genügend symmetrischen Verteilung auf das Eintreffen des parabolischen Falles geschlossen werden kann. —

Das Resultat kann sofort auf das Typenproblem der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen angewendet werden. Wenn wir uns auf den Fall beschränken, wo sämtliche Windungspunkte der Fläche über  $(0, 1, \infty)$  liegen, so können wir in der hyperbolischen Ebene in bestimmter Weise das Grundpolygon der zur Fläche gehörigen fuchsoiden Gruppe konstruieren. Die Seiten dieses Polygons sind einander paarweise zugeordnet. Wenn diese Zuordnung genügend symmetrisch ist, so kann man mit Hilfe des Lemmas schließen, daß die Fläche parabolisch ist. — Das Ergebnis ist deshalb sehr bemerkenswert, weil man in dieser Weise Flächen konstruieren kann, die trotz einer beliebig starken Verzweigung zufolge der symmetrischen Anordnung der Blätter doch parabolisch sind.

L. Ahlfors (Helsingfors).

**Mazurkiewicz, S., et H. Szmuszkowiczówna: Sur les fonctions quasi-analytiques (B).** Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1935, 1—3.

Les A. construisent un exemple d'une fonction  $f(x)$  quasi-analytique  $B$  [quasi-analytique au sens de M. S. Bernstein, c'est-à-dire telle qu'il existe deux constantes  $M$  et  $\vartheta < 1$ , une suite croissante d'entiers positifs  $\{n_i\}$  et une suite de polynômes  $P_i(x)$  (de degré  $n_i$ ), tels que  $|f(x) - P_i(x)| < M\vartheta^{n_i}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ;  $i = 1, 2, \dots$ )], telle que  $f(x) \not\equiv 0$  et telle que  $f^{(k)}(0) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

Mandelbrojt.

**Priwaloff, I.: Sur certaines questions de la théorie des fonctions subharmoniques et des fonctions analytiques.** Rec. math. Moscou 41, 527—550 u. franz. Zusammenfassung 550 (1935) [Russisch].

The first part of this paper contains the proofs of three theorems announced in a previous note by the author [C. R. Acad. Sci. URSS. 1, 201—203 (1935)]. Besides the theorem already mentioned and discussed in the review of that note (this Zbl. 11, 62) the author establishes the following theorems: I. Let  $v(P) = v(x, y, z)$  be a subharmonic function in a domain  $D$  contained between two half-planes making an angle  $\alpha\pi$  ( $\alpha > 0$ ). Suppose that (a)  $\limsup v(x, y, z) \leq C$  either if  $(x, y, z)$  approaches a boundary point of  $D$  (at a finite distance), or if  $z \rightarrow \infty$ , (b)  $v(x, y, z) - \varepsilon r^{1/\alpha} \rightarrow -\infty$  for any  $\varepsilon > 0$  as  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ . Then  $v(x, y, z) \leq C$  throughout the whole domain  $D$ . II. Let  $v(P)$  be a subharmonic function in the whole space and let a finite number  $\varrho$  exist such that for any  $\varepsilon > 0$  the inequality  $v(P) < r^{\varepsilon + \varepsilon}$  holds whenever  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  is sufficiently large. Suppose further that  $v(x, y, z)$  is bounded above whenever  $z$  is sufficiently large or  $(x, y, z)$  belongs to one of two constant half-planes passing through the  $z$ -axis and making an angle  $< \pi/\varrho$ . Then  $v(x, y, z)$  is bounded above in the whole angular region between the given half-planes. — The second part contains a few analogous results connected with the maximum principle (an extension of Carleman's lemma to subharmonic functions) the method of harmonic major functions; e. g. a test for a subharmonic function to be the sum of a non-positive subharmonic function and a non-negative harmonic function (a generalization of the well-known Nevanlinna „Zerlegungssatz“ on holomorphic functions). — Finally, in Part 3 the author deals with different applications of the lemma of Schwarz. For instance: Let  $\omega(z)$  be a holomorphic function in the unit circle  $K_0$  with  $\omega(0) = 0$ ,  $|\omega(z)| \leq 1$  for  $z < 1$ , and  $V(z)$  a subharmonic function in  $K_0$ . Then  $\max_{|z| \leq e} V[\omega(z)] \leq \max_{|z| \leq e} V(z)$  for every  $\varrho < 1$ . As an application of this inequality an estimate for holomorphic functions is established.

Saks (Warszawa).

**Oka, Kiyosi: Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc.** J. Sci. Hiroshima Univ. A 4, 93—98 (1934).

(F) sei eine Menge charakteristischer (analytischer) Flächen ohne wesentliche Randpunkte [s. Behnke-Thullen, Erg. Math. 3 (3) (1934)] in einem Bereiche  $\Delta$  des  $w, z$ -Raumes. Die Familie (F) heißt normal in einem Punkte  $P$  von  $\Delta$ , wenn es eine genügend kleine Hyperkugel  $\S$  um  $P$  gibt, so daß alle Flächen von (F) in  $\S$  angebar sind durch  $f(w, z) = 0$ , wo jedes  $f$  regulär in  $\S$  ist und die  $f$  in  $\S$  eine normale Familie (welche nicht die Konstante 0 als Grenzfunktion aufweist) bilden. (F) heißt



in einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  normal, wenn sie in jedem Punkte von  $\mathfrak{B}$  normal ist. — Verf. gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Normalität einer Familie von Flächen in einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  an. Sodann untersucht er die Menge ( $J$ ) von Punkten eines Bereiches, in denen ( $F$ ) aufhört normal zu sein. Er kündigt an, daß ( $J$ ) dieselben Eigenschaften hat wie die Menge der singulären Punkte einer analytischen Funktion und wie die Menge der Punkte, in denen eine Familie von Funktionen  $f(w, z)$  aufhört, normal zu sein. (Ist eine der beiden letzten Aussagen bewiesen, so folgt die andere bekanntlich unmittelbar nach den Aussagen von H. Cartan und P. Thullen.)  
Behnke (Münster i. W.).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

Dent, Beryl M.: On observations of points connected by a linear relation. Proc. Physic. Soc., London 47, 92—108 (1935).

The author has re-solved the problem of obtaining the straight line of best fit to a given set of observed coordinates  $(x_r, y_r)$ , under the assumption that both coordinates are subject to error. The reviewer is forced to disagree with the statement that the assumption that the most probable value of an observed value  $x_r$  is  $x_r^m$  is a function of  $x_r^m - x_r$  only does not require the assumption that "a priori all values of  $x_r^m$  are equally likely". An approximation method for calculating the probability of a given error in the inclination of the line is developed. There is also given a method of estimating the precision constants and their ratio with the accompanying errors. A numerical example is appended.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Grigeresik, G.: La compensation combinée des observations directes. Ann. Sci. Univ. Jassy 20, 59—70 (1935).

Given a series of measurements  $l_1, l_2, \dots, l_r$ , of a quantity, generally the deviation of their mean  $M_r$  from the mean  $L$  of the population of such measurements is proportional to  $r^{-\frac{1}{2}}$ . The author gives both a simple graphical process and a numerical method for estimating the value approached by  $M_r$  as  $r$  is increased indefinitely and proposes a weighted average formed from this value and  $M_r$  as an estimate of the quantity measured. The graphical method shows up clearly an exceptionally erroneous observation and the whole process introduces a desirable compensation in those cases in which the first measurements contain large errors or possess a preponderance of errors of the same sign. Expressions for the standard errors of the estimates and a numerical example are given.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Mogno, Roberto: Di un metodo di interpolazione statistica. Metron 12, Nr 2, 3—37 (1935).

The method, based upon the principle of equal partial areas (or sums), for graduating  $n$  grouped observations by a  $k$ -parametric curve is here developed with regard paid to the fact that the  $k$  partial areas for equalizing can be chosen in different ways. Explicit formulae for graduation by a parabola of order  $k-1$  in the case of equidistancy, which formulae are identical to those deduced from the principle of least squares.

Herman Wold (Stockholm).

Wold, Herman: A study on the mean difference, concentration curves and concentration ratio. Metron 12, Nr 2, 39—58 (1935).

Für die mittlere Differenz  $g$  einer statistischen Variablen mit der stetig differenzierbaren Verteilungsfunktion  $F(x)$  wird die folgende Umformung angegeben:

$$g \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y| F'(x) F'(y) dx dy = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) \int_{-\infty}^x F(y) dy.$$

Die rechte Seite, als Stieltjesintegral interpretiert, bietet sich nun als (bisher vermißte) einheitliche Definition für  $g$  auch bei beliebiger Verteilungsfunktion dar. Zugleich gewinnt man so eine sehr bequeme Methode zur Auswertung von  $g$  und zur Behandlung der anderen im Titel genannten Größen. [Allgemeines zu dieser

Frage bei Gini, *Metron* 9 (1932); dies. Zbl. 4, 121.] Zum Schluß eine Anwendung auf die Summenlinien- (=  $\omega^2$ ) Methode zur Beurteilung von Beobachtungsreihen (Cramér, *Skand. Aktuarie Tidskr.* 1928; auch v. Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* 1931; dies. Zbl. 2, 277). W. Feller (Stockholm).

**Jeffreys, Harold:** Some tests of significance, treated by the theory of probability. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 203—222 (1935).

The author considers two populations from the first of which a sample shows  $x$  specimens with, and  $y$  specimens without a designated property, while a sample from the second shows respectively  $x'$  and  $y'$ . Suppose the populations large but finite and with fractions  $p$  and  $p'$  respectively showing the given property. Let  $q$  denote the proposition,  $p = p'$ ,  $h$  our previous information, and  $\theta$  the compositions of the samples. We are being asked if  $q$  is true, and if true what is the posterior probability distribution among values of  $p$ , while if false, what is the distribution among values of  $p$  and  $p'$ . The usual procedure in deciding as to the significance of a difference between  $x/y$  and  $x'/y'$ , is to agree that such a difference is significant if it exceeds a certain rather arbitrary multiple of its standard error, independent of other information. — The author approaches the subject by applying directly principles of prior and inverse probability such as the following. "If we are asked a question and given no further information, the prior probabilities of the alternatives stated in the question are equal. . . . This expresses no opinion about the frequency of the truth of one alternative among real or imagined populations." "If  $q$  is true then the prior probability of  $p$  is uniformly distributed from 0 to 1." The author concludes that

$$\frac{P(q|\theta, h)}{P(\infty q|\theta, h)} = \frac{(x+y+1)(x'+y'+1)}{(x+x'+y+y'+1)} \binom{x+y}{x} \binom{x'+y'}{x'} / \binom{x+x'+y+y'}{x+x'}$$

[misprinted in (12) p. 204]. He obtained an approximation for large samples and appends a numerical table. — Suppose we have two different ways of measuring a quantity, the true values (including any systematic error) are  $x$  and  $x'$ , with systematic difference,  $y$ . Suppose the prior probability of  $x$  uniformly distributed over a long range, and of  $y$  over a much smaller range,  $-m$  to  $m$ . The measures seem to be  $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$  (apparently misprinted by the author), and  $\sigma, \sigma', \bar{x}, \bar{x}'$  are as usual. Let  $s^2 = (2\sigma^2/n) + (2\sigma'^2/n')$ , and let  $\lambda = (\bar{x} - \bar{x}')/s$ ,  $\mu = m/s$ . The author concludes that "if  $\mu$  is small, the observations tell us nothing that we did not already know concerning the truth of  $q$ ". However if  $\mu$  is large and  $\lambda^2$  exceeds substantially  $\log(2\mu/\pi^{1/2})$ , we can infer that there is a systematic difference. — The author continues with a detailed critique of the availability of the normal law for judging large errors, and the consequently appropriate variable weighting of observations according to absolute magnitude. When the standard errors are not known in advance, the author concludes that under reasonable hypotheses for  $p$  and  $p'$  large,

$$\frac{P(q|\theta, h)}{P(\infty q|\theta, h)} = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2},$$

using the previous definitions of  $\mu$  and  $\lambda$ . — The author extends his results to the case of correlation, and also to the study of latent periodicities obtaining results replacing similar criteria of Sir Gilbert Walker and of Schuster. The author concludes with remarks as to certain available extensions. Albert A. Bennett.

**Bartlett, M. S.:** The effect of non-normality on the  $t$  distribution. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 223—231 (1935).

Statistical tests of significance are fiducial mainly only when normality is assumed for the chance distribution of the variates. But practical experience shows that the tests may be used confidently under moderate departures from the normal law, while for grossly non-normal distributions the tests become inappropriate. For  $t$  corresponding to the variation of a simple mean, the author obtains by the use of moment gene-



rating functions, the following expansion for the frequency function,

$$\left\{ 1 - \frac{\gamma_1}{3! \sqrt{n}} (2D^3 + 3D) - \frac{\gamma_2}{12n} D^4 + \frac{\gamma_1^2}{18n} (D^6 + 12D^4 + 18D^2) + \dots \right\} T,$$

where  $T$  is the distribution of  $t$  in normal theory and  $D \equiv \partial/\partial t$ . When the number of replications is large, systematic error is eliminated by randomization of samples thus avoiding the chief source of vitiation of the tests. The author's results tend to justify on theoretic grounds the observed reliability of tests when nearly normal distributions are involved.

*Albert A. Bennett* (Providence).

**Mählmann, Henry:** Ein Beitrag zu Untersuchungen über zweidimensionale Verteilungen von Massenpunkten bei zufallsartig bedingten Bewegungen. *Biometrika* 27, 191—226 (1935).

L'auteur analyse le problème suivant: Un point mobile dans le plan décrit successivement, à partir d'une position donnée  $Q$ ,  $m$  traits rectilignes dont les directions sont données; la probabilité pour que la longueur du  $k^{\text{ième}}$  trait soit comprise entre  $s_k$  et  $s_k + ds_k$  est égale à  $v(s_k) ds_k$ . Si un grand nombre  $N$  de points est concentré au point  $Q$  et si tous ces points se meuvent indépendamment les uns des autres, on cherche la densité de distribution de ces points après  $m$  déplacements successifs,  $m$  et  $N$  étant très grands. — Les formules données dans ce travail comprennent comme cas particuliers les résultats trouvés par Lord Rayleigh (*Philos. Mag.*, Aug. 1880, p. 75; Febr. 1899, p. 247), Pearson (*Drapers Company Research Memoirs, Biometric Series* 3. London 1906), Kluiver (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, Oct. 1905, 341—350) et autres applications à la théorie de la migration des insectes. *B. Hostinský*.

**Smirnof, N.:** Über die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe. *Metron* 12, Nr 2, 59—81 (1935).

Die in  $n$  unabhängigen Versuchen beobachteten Werte einer zufälligen Variablen  $X$  seien, der Größe nach geordnet,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ; Verf. untersucht die Verteilung des  $k$ -ten Gliedes  $X_k$ . Der allgemeinste Fall kann vor allem durch eine geeignete Abbildungstransformation auf den einfachsten Fall der Gleichverteilung reduziert werden. Der Grenzübergang für  $n \rightarrow \infty$  führt, sowohl im Falle, daß  $k$  konstant bleibt, als auch in jenem, wo  $k/n$  einem konstanten Werte zustrebt, zu interessanten Ergebnissen: unter sehr allgemeinen Bedingungen ist die Grenzform der Verteilung im ersten Falle durch eine Pearsonsche Kurve vom Typus III, im zweiten durch die Gaußsche Kurve dargestellt. *Bruno de Finetti* (Trieste).

**Feldman, Hyman M.:** Mathematical expectation of product moments of samples drawn from a set of infinite populations. *Ann. math. Statist.* 6, 30—52 (1935).

The author obtains explicit formulas, continuing investigations initiated by A. A. Tchouproff, *Biometrika* 12, 140—210 (1918/19) (reference by author, incorrect), A. E. R. Church, *Biometrika* 18, 321—394 (1926), and J. Pepper, *Biometrika* 21, 231—258 (1929). Extended formulas are found for the expected values of  $p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{22}, p_{41}, p_{32}, p_{51}, p_{42}, p_{33}, p_{111}, p_{211}$ , and for the variances of some of these, by means of direct but lengthy algebraic computation. *A. A. Bennett*.

**Loewy, Alfred:** Zur Bedeutung des Stieltjesschen Integrals in der Versicherungsmathematik. *Assekuranz-Jb.* 54, 13—26 (1935).

Bei Verwendung der Stieltjesschen Integrale kann man sog. Integralsterbensintensitäten

$$M_{[y]+t} = \int_0^t \frac{d(l_{[y]} - l_{[y]+\tau})}{l_{[y]+\tau}}$$

eingeführen (vgl. dies. Zbl. 1, 345; 4, 301; 9, 364), so daß man nur die Stetigkeit und nicht mehr die Differenzierbarkeit der Funktionen der Sterbetafel zu verlangen braucht. — Weiter wird gezeigt, daß man die Prämien und Deckungskapitale der Todesfall- und Leibrentenversicherung auch berechnen kann, wenn man von den  $l_{[y]}$  nur die ihnen zukommende Eigenschaft der Monotonie, nicht aber ihre Stetigkeit verlangt. *Löer*.

**Knüfermann, Gerhard:** Das Problem der Gerechtigkeit in der Lebensversicherung. Bl. Versich.-Math. **3**, 231—259 (1935).

**Burkhardt, Felix:** Statistische und mathematische Betrachtungen über einige geldliche Ausgleichsprobleme der Verwaltung unter besonderer Berücksichtigung des Finanzausgleichs. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg **1**, 65—75 (1935).

## Geometrie.

**Petrini, Henrik:** Un fondement tout rationnel de la géométrie. (Stockholm, Sitzg. v. **14.—18. VIII. 1934.**) 8. Skand. Mat.-Kongr., 50—74 (1935).

**Mahrenholz, J.:** Sur les polygones réguliers convexes de  $(4n+2)$  côtés. Mathesis **49**, 143—145 (1935).

**Gericke, H.:** Zur Arbeit von P. Ganapathi: „A note on the oval.“ Math. Z. **40**, 201 (1935).

In Übereinstimmung mit dem in dies. Zbl. **9**, 30 erhobenen Einwand wird bemerkt, daß die von Ganapathi ausgesprochene Behauptung beispielsweise bei einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Höhe gleich der Basis ist, nicht zutrifft.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Gericke, H.:** Über die größte Kugel in einer konvexen Punktmenge. Math. Z. **40**, 317—320 (1935).

Nach Steinhagen [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **1**, 15—26 (1922)] ist die größte Kugel, die in jedem  $n$ -dimensionalen konvexen Körper der Dicke 1 Platz hat, die Inkugel des regulären Simplex der Dicke 1. Verf. kürzt den Beweis von Steinhagen erheblich ab, indem er eine (wohl neue)  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung einer bekannten Relation zwischen den Höhen und den Abständen gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders heranzieht.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Süss, Wilhelm:** Durchmesser und Umkugel bei mehrdimensionalen Punktmengen. Math. Z. **40**, 315—316 (1935).

Verf. beweist auf wenigen Zeilen den folgenden Satz:  $w$  sei der Winkel, unter dem die Kante des  $n$ -dimensionalen regulären Simplex vom Mittelpunkt der Umkugel gesehen wird. Ist dann  $T$  ein beliebiges  $n$ -dimensionales Simplex und  $P$  ein Punkt innerhalb  $T$ , und wird von  $P$  aus eine Kante von  $T$  unter einem Winkel  $< w$  gesehen, so erscheint von  $P$  aus wenigstens eine Kante unter einem Winkel  $> w$ . Hieraus ergibt sich sehr einfach mittels bekannter Schlußweisen [Reinhardt, Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **25**, 157—163 (1917); Bonnesen-Fenchel, Erg. Math. **3**, H. 1, 77—78 (1934)] der Satz von Jung: Die kleinste Kugel, in der jede Punktmenge vom Durchmesser 1 Platz hat, ist die Umkugel des regulären Simplex der Kantenlänge 1.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Ganapati, P.:** A property of ovaloids of constant breadth. Tôhoku Math. J. **40**, 421—424 (1935).

Es sei  $\mathfrak{K}$  ein konvexer Körper,  $\mathfrak{B}$  der zugehörige Vektorkörper und  $\mathfrak{M}$  die „Medianfläche“ von  $\mathfrak{K}$ , d. h. der Ort der Mittelpunkte der Berührungssehn von parallelen Stützebenen. Für die Oberflächen  $S$  gilt dann

$$S(\mathfrak{B}) = 4[S(\mathfrak{K}) + 2S(\mathfrak{M})], \quad (1)$$

wobei  $S(\mathfrak{M})$  in geeigneter Weise formal zu definieren ist. Aus Blaschkes räumlichem Analogon des Wirtingerschen Lemmas (vgl. Blaschke, Kreis und Kugel, S. 108. Leipzig 1916) folgt  $S(\mathfrak{M}) \geq 0$ , also  $S(\mathfrak{B}) \geq 4S(\mathfrak{K})$ . — Wendet man die Minkowskische Ungleichung  $M^2 \geq 4\pi S$ , wo  $M$  das Integral der mittleren Krümmung ist, auf  $\mathfrak{B}$  an, so ergibt sich mit Rücksicht auf (1)

$$M(\mathfrak{B})^2 = 4M(\mathfrak{K})^2 \geq 16\pi[S(\mathfrak{K}) + 2S(\mathfrak{M})], \quad (2)$$



also eine Verschärfung dieser Ungleichung. In (2) steht das Gleichheitszeichen für Körper  $\mathfrak{K}$  von konstanter Breite und nur für solche. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Stopher, E. C.:** The calculation of centroids. Tôhoku Math. J. **40**, 398—404 (1935).

Herleitung von einfachen Formeln für die Koordinaten der Schwerpunkte von Körpern und Flächen, die mit einer Raumkurve in der Weise verknüpft sind, daß jede Normalebene der Kurve den Körper bzw. die Fläche in einer Kreisscheibe bzw. Kreisl Linie schneidet, deren Mittelpunkt auf der Kurve liegt. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Fenici, A.:** Centri di gravitazione e corpi centrobarici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 493—498 (1935).

Levi-Civita bezeichnet (in einer demnächst erscheinenden Arbeit) als Gravitationszentrum einer Massenverteilung jeden Raumpunkt, in welchem sich die Newtonschen Anziehungskräfte der Massen aufheben. Verf. bemerkt, daß jede beschränkte Massenverteilung, in deren Innern das Potential differenzierbar ist, wenigstens ein Gravitationszentrum besitzt (Maximumstelle des Potentials). Es werden einige einfache Eigenschaften der Gravitationszentren hergeleitet. — Ein Körper heißt (nach Kelvin) zentrobarisch, wenn seine Anziehungskraft in einem willkürlichen äußeren Punkt auf einen festen Punkt zu gerichtet ist. (Dieser feste Punkt ist dann notwendig ein Gravitationszentrum.) Es wird gezeigt: Ein Körper, der sowohl in bezug auf seine äußeren als auch seine inneren Punkte zentrobarisch ist, ist kugelsymmetrisch.

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Andreoli, Giulio:** Fondamenti per una geometria isotropa delle varietà numeriche a due dimensioni (metrica lineare; metrica angolare). Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. **4**, 210—214 (1935).

Grundriß der Begründung einer metrischen Geometrie in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Ausgangspunkt ist die Betrachtung der Kurven „gleicher Entfernung“ um jeden Punkt  $P$  mit der betreffenden „Drehungsgruppe um  $P$ “, die gegeben sind; es werden dann beliebige Entfernungen gemessen, geodätische Linien und Winkel definiert, und eine Dualität eingeführt, die die Punkte in geodätische Linien verwandelt.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Inzinger, Rudolf:** Über eine darstellende Geometrie der Linienelemente erster und zweiter Ordnung des Raumes. S.-B. Akad. Wiss. Wien **1935**, 1—30 (H. 1/2).

Eine Abbildung, welche die Differentialgeometrie des Raumes auf eine völlig neue Art der Konstruktion zugänglich macht. Ausgehend von der bekannten Lieschen Abbildung der Linienelemente einer Ebene  $\pi$  auf die Punkte des Raumes wird hier umgekehrt der Raumpunkt  $P$  auf das Linienelement  $(P'p')$  in  $\pi$  abgebildet. Einer Raumkurve  $k$  entspricht die Linienelementreihe  $(k'k'')$ , wo  $k'$  der Ort von  $P'$  und  $k''$  die Einhüllende von  $p'$  ist. Eine Fläche bildet sich als Nullkorrelation oder Linienelementkongruenz ab. Einem räumlichen Linienelement  $(Pt)$  wird außer  $(P'p')$  noch ein weiterer Punkt  $T_u$  derart zugeordnet, daß bei festem  $P$  dem Bündel aller  $t$  das Feld der  $T_u$  auf einfache Art linear entspricht; hierdurch ist die Abbildung der Linienelemente erster Ordnung und damit gleichzeitig auch der Flächenelemente gegeben.  $P$  mit einer hindurchgehenden Geraden  $t$  und einem Kreise, der  $t$  in  $P$  berührt und die Achse  $m$  hat, wird Schmiegelement  $(Ptm)$  genannt; diesem wird außer  $P'p' T_u$  noch ein Punkt  $M_s$  zugeordnet, der bei festen  $P$  und  $t$  der Geraden  $m$  ebenfalls linear entspricht; hierbei bilden sich die Schmiegelemente auf einer Kugel (Meusnierselemente) auf eine Gerade als Ort der  $M_s$  ab. Die Bildpunkte  $T_u$  und  $M_s$  haben in  $\pi$  kinematische Bedeutung hinsichtlich einer durch die Kurven  $k'$  und  $k''$  festgelegten Bewegung. Die Abbildung wird zwar analytisch aufgestellt und untersucht, doch sind die daraus folgenden Konstruktionen ziemlich einfach mit Zirkel und Lineal auszuführen. Dies wird auf einige Grundaufgaben und auf die Flächentheorie angewendet, wobei z. B. eine Indikatrix eines Linienelementes von  $\pi$  in bezug auf eine Linienelementkongruenz definiert wird.

*Eckhart* (Wien).

**Algebraische Geometrie:**

**Vries, Jan de:** Eine Abbildung der Kongruenz von Stuyvaert auf das ebene Punktfeld. *Nieuw Arch. Wiskde* 18, 63—66 (1935).

Die Kongruenz von Stuyvaert besteht aus den kubischen Raumkurven  $\varrho^3$ , welche zwei feste Punkte  $A$  und  $B$  enthalten und drei vorgegebene Geraden  $c_1, c_2, c_3$  je zweimal treffen. Als Bild einer Kurve  $\varrho^3$  dieser Kongruenz betrachtet Verf. den Schnittpunkt der Geraden, welche  $\varrho^3$  in  $A$  berührt, mit einer vorgegebenen Bildebene. Verf. untersucht die so erhaltene Abbildung. Er betrachtet dabei die Systeme von ausgearteten Kurven  $\varrho^3$ , die Systeme von Kurven  $\varrho^3$ , welche eine vorgegebene Gerade treffen, durch einen Punkt von  $c_1$  gehen oder eine vorgegebene Ebene berühren, und die Kurven  $\varrho^3$ , welche aus drei Geraden zusammengesetzt sind.

*G. Schaake* (Groningen).

**Villa, Mario:** Sulle curve razionali di un'iperquadrica. *Boll. Un. Mat. Ital.* 14, 157—159 (1935).

L'Autore determina le curve algebriche razionali di un'iperquadrica. *Autoreferat.*

**Godeaux, Lucien:** Une observation sur les involutions d'ordre huit et de genres un appartenant à une surface de genres un. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 4, 143—147 (1935).

Beispiel einer Involution  $I_8$  auf einer Fläche mit  $p_a = P_4 = 1$ ;  $I_8$  hat ebenfalls  $p_a = P_4 = 1$  und wird aus zwei  $I_4$  zusammengesetzt; jede  $I_4$  hat 4 doppelte und 4 vierfache Koinzidenzpunkte, so daß die doppelten Koinzidenzpunkte einer der beiden  $I_4$  vierfach für die andere sind.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Godeaux, Lucien:** Sur les courbes canoniques de genre six. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 4, 147—152 (1935).

Einige Bemerkungen über gewisse Flächen fünfter, sechster und siebenter Ordnung, die die kanonische Kurve  $C^{10}$  des Geschlechts 6 und allgemeinen Typus enthalten.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Spampinato, Nicolò:** I punti biocompleksi e le varietà iperalgebriche del Segre. *Esercit. Mat.*, II. s. 8, 67—76 (1935).

Vortrag, in dem Fragestellungen, die der Verf. in drei noch nicht erschienenen Arbeiten behandelt hat, andeutungsweise besprochen werden. 1. Der Begriff „Unterpunkt“ (sottopunto) wird eingeführt. Auf der komplexen Geraden z. B. wird ein Punkt durch das System der Zahlenpaare  $\alpha x, \alpha y$  definiert, wo  $x, y$  komplexe Zahlen sind und  $\alpha$  einen komplexen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Läßt man für  $\alpha$  nur reelle Zahlen zu, so erhält man einen Unterpunkt. 2. Im Anschluß an C. Segre werden (formal) im projektiven komplexen und dualen Raum bikomplexe und biduale Punkte eingeführt, und es wird die Frage behandelt, wie man unmittelbar von der Algebra der bikomplexen oder bidualen Zahlen ausgehend bikomplexe oder biduale (oder von allgemeineren Algebren ausgehend allgemeinere) Punkte definieren kann.

*E. A. Weiss* (Bonn).

**Hartley, Miles C.:** Some geometrie properties of the algebraic, plane sextic invariant under the symmetric  $G_6$ . *Tôhoku Math. J.* 40, 425—432 (1935).

Fortsetzung der in dies. Zbl. 9, 178 (1934) besprochenen Arbeit über  $C^5$ . — Ein in Punktkoordinaten homogenes Polynom  $P^6$ , gebildet aus den elementarsymmetrischen Funktionen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  von  $x_1, x_2, x_3$  stellt, gleich Null gesetzt, die allgemeinste ebene Kurve sechster Ordnung  $C^6$  dar, welche die symmetrische Kollineationsgruppe  $G_6$  verträgt. Multipliziert man  $P^6$  mit  $\Phi_1^3$ , und setzt man dann  $y_1 = \Phi_1^3, y_2 = \Phi_1 \Phi_2, y_3 = \Phi_3$ , so erhält man eine Abbildung der  $C^6$  auf eine ebene Kurve dritter Ordnung, und indem man die bekannten Eigenschaften dieser Kurve — Sätze über Tangenten, Wendepunkte, Schnitte mit Kegelschnitten und Kurven dritter Ordnung, insbesondere mit der Hesseschen Kurve — überträgt, erhält man Sätze über die  $C^6$ . — Spezielle gegenüber  $G_6$  invariante  $C^6$  entstehen unter anderem, wenn man verlangt, daß die Kurve die Kollineationen einer Gruppe von höherer Ordnung vertragen soll, die  $G_6$  als Untergruppe enthält. Für solche Kurven werden Beispiele angegeben, die mit



Ausnahme einer gegenüber  $G_{24}$  invarianten Kurve schon in einer von Vojtěch aufgestellten Liste von  $C^6$  erscheinen, die Kollineationsgruppen gestatten [J. Vojtěch, Věstník Královské české společnosti nauk. Třída-Math.-Přírodovědecká 1913, No 13 und České Ak. Třída II (Mathematicko-Přírodnická) Ročník 22 (1913) v Praze. Číslo 42].

E. A. Weiss (Bonn).

Roth, L.: Gli invarianti d'una varietà algebrica di  $S_4$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 314—317 (1935).

Vorläufige Mitteilung der Ergebnisse einer Untersuchung, die bald erscheinen wird. Für eine algebraische  $V^n$  des Raumes  $S_4$ , die mit normalen Singularitäten versehen ist, betrachtet Verf. eine allgemeine adjungierte  $V^1_3$ ; diese schneidet  $V^n$  in ihrer Doppelfläche  $B$  und in einer übrigen Fläche  $F$ , deren Charaktere hier angegeben werden. Es werden auch die Schnittkurve  $I$  von  $F$  und  $B$  und die charakteristischen Kurven des Systems  $|F|$  betrachtet. Besonderer Fall, wo  $l = n - 5$  ist. E. G. Togliatti.

Hodge, W. V. D.: Harmonic integrals associated with algebraic varieties. Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 249—271 (1935).

Dans ce travail l'a. commence par rappeler la représentation classique d'un  $S_r$  projectif complexe sur une  $V_{2r}$  de C. Segre [sans toutefois même pas faire le nom de cet a.: cfr. C. Segre, Math. Ann. 40, 413 (1892)], et il approfondit ensuite l'étude de ladite représentation au point de vue métrique déjà considéré pour  $r = 2$  par G. Mannoury [Nieuw Arch. Wiskde (2) 4, 112 (1898)]. Cela lui permet d'attacher une métrique convenable à la variété  $W_{2m}$  riemannienne d'une  $V_m$  algébrique quelconque; métrique dont il s'occupe en établissant plusieurs propriétés de certains tenseurs attachés à  $W_{2m}$ . Parmi ces tenseurs ont une importance capitale les tenseurs harmoniques, introduits et étudiés auparavant par l'a. même, dans le cas général d'une variété analytique quelconque donnée d'une métrique [v. W. V. D. Hodge, Proc. London Math. Soc. (2) 36, 257 (1933) et (2) 38, 72 (1934); ce Zbl. 8, 22 et 10, 376]]. — Dans le cas particulier en question les tenseurs harmoniques jouissent de nombreuses propriétés spéciales, qu'il n'est pas possible d'exposer ici en détail. Je me borne, par conséquent, à énoncer les résultats les plus remarquables. — La partie réelle et la partie imaginaire d'une intégrale abélienne  $p$ -ple de première espèce attachée à  $V_m$ , sont toujours des intégrales harmoniques relatives à  $W_{2m}$ , c'est-à-dire que chacune d'elles donne lieu à un tenseur harmonique de  $W_{2m}$  ayant le rang  $p$  et jouissant d'une certaine propriété. Comme — pour  $2 \leq p \leq m$  — le nombre des tenseurs indépendants de ce dernier type est  $R_p - R_{p-2}$  ( $R_i$  indiquant le  $i^{\text{me}}$  nombre de Betti de  $W_{2m}$ ), il s'ensuit que le nombre des intégrales  $p$ -ples de première espèce indépendantes de  $V_m$  ne peut pas dépasser  $\frac{1}{2}(R_p - R_{p-2})$ . Pour  $p = 1$  subsiste le fait connu (cfr. p. ex. S. Lefschetz, L'analysis situs et la géométrie algébrique, p. 101. Paris: Gauthier-Villars) que le nombre des intégrales différentielles totales de première espèce de  $V_m$  est exactement  $\frac{1}{2} R_1$ .  
Beniamino Segre (Bologna).

### Differentialgeometrie:

Haenzel, G.: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz in ihrer Beziehung zu den quadratischen Cremonatransformationen und den Differentialgleichungen erster Ordnung. J. reine angew. Math. 173, 91—113 (1935).

Die Arbeit entwickelt die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz  $C^1_1$  auf Grund einer in diesen Zusammenhang neu eingeführten Abbildung. — 1. Es werden zuerst die Regelscharen der  $C^1_1$  analytisch dargestellt. Ist dann  $C^1_1$  hyperbolisch, d. h. ihre Leitgeraden  $l$ ,  $r$  sowie die Kanten des Koordinatentetraeders reell, so stellt bei Deutung der Linienkoordinaten der Kongruenzstrahlen als homogene Punktkoordinaten die Plueckersche Grundgleichung für die  $\infty^2$  Kongruenzstrahlen ein Strahlenhyperboloid  $H^2$  dar, dessen Punkte die  $\infty^2$  Kongruenzstrahlen eineindeutig abbilden. Ist dann  $A$  ein Flächenpunkt, durch den die Leitstrahlen  $l_s$  und  $r_s$  von  $H^2$  gehen, so wird  $H^2$

von  $A$  als Projektionszentrum aus auf eine mit der Geraden  $RL$  inzidente Bildebene stereographisch projiziert ( $R=r_s \times \varepsilon$ ;  $L=l_s \times \varepsilon$ ). Durch diese Projektion sind die  $\infty^2$  Kongruenzstrahlen auf die Punkte von  $\varepsilon$  abgebildet.  $R, L$  sind die beiden reellen Fundamentalpunkte der Abbildung,  $RL$  die „Fundamentalgerade“. — Analog gehen die Strahlen der elliptischen Kongruenz in die Punkte einer Bildebene mit zwei konjugiert-imaginären Fundamentalpunkten über. — Die Abbildung selbst wird dann analytisch dargestellt, ihre Eigenschaften angegeben und in einer tabellarischen Übersicht geordnet. Dabei zeigt sich, daß die Eigenschaften der elliptischen und hyperbolischen  $C_1^1$  übereinstimmen, wenn man sie in  $\varepsilon$  einmal als Theoreme der euklidischen und das andere Mal als Sätze der pseudoeuklidischen Geometrie gewinnt, und daß die Beweise der Aussagen sowohl in der euklidischen wie in der pseudoeuklidischen Geometrie geführt werden können. — 2. Die Betrachtung der beiden Arten kollineare Transformationen der  $C_1^1$  in sich — je nachdem die Transformation  $l, r$  in Ruhe läßt oder miteinander vertauscht — führt Verf. zu dem wichtigen neuen Ergebnis, daß die automorphen Kollineationen der  $C_1^1$  in der Bildebene durch die quadratischen Cremonatransformationen wiedergegeben werden. Dies bedeutet: Werden zunächst die Kongruenzstrahlen der  $C_1^1$  in die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung abgebildet und dann eine solche Fläche kollinear in sich transformiert, außerdem noch vor und nach Ausübung der Kollineation stereographisch projiziert, so sind die beiden entstandenen Bildfelder durch eine quadratische Cremonatransformation aufeinander bezogen. — 3. Es werden sodann die zwei verschiedenen Arten von Involutorien der  $C_1^1$  bis ins einzelne untersucht, denen die zwei Arten involutorische Cremonatransformationen entsprechen. Geht man von diesen letzteren aus, so ergibt sich ganz natürlich eine analytische Darstellung der Theorie der Involutorien der  $C_1^1$  [vgl. Jolles, Math. Z. 27, 427 (1928), der diese Theorie auf synthetischem Wege gewonnen hat; Haenzel, J. f. Math. 166, 167 (1932); dies. Zbl. 3, 412] und ihrer Polartheorie, die ebenfalls ausführlich gegeben wird. — 4. Anschließend werden differentiale geometrische Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der  $C_1^1$  enthaltenen Regelflächen abgeleitet, wobei insbesondere die Bedeutung des Bogenelements und des Krümmungskreises der Bildebene für die Geometrie auf der  $C_1^1$  und für die verschiedenen Typen von Regelstrahlen einer in der  $C_1^1$  liegenden (algebraischen oder transzendenten) Regelschar herausgearbeitet wird. — 5. Auf einfachem Wege werden so die bisher kaum behandelten Hüllflächen, deren Regelscharen in der  $C_1^1$  liegen, gewonnen, wobei mehrere Arten solcher Hüllflächen abgeleitet werden. — 6. Die in diesem Zusammenhang ungewohnte, vom Verf. aber als sehr fruchtbar aufgewiesene Heranziehung der Clairautschen und der Differentialgleichung erster Ordnung liefert wichtige Ergebnisse für die  $C_1^1$ . Zwei für die Bedeutung und Tragweite der allgemeinen Resultate gut gewählte Beispiele und ihre Durchführung schließen die interessante Arbeit ab.

Steck (München).

**Inzinger, Rudolf:** Über die Evolutoiden und Zwischenevolutoiden von Raumkurven. *Mh. Math. Phys.* 42, 57—84 (1935).

Ist  $k_1$  eine der Filarevoluten einer Raumkurve  $k$  und wird die Strecke der zum samengehörigen Punkte  $P_1$  von  $k_1$  und  $P$  von  $k$  durch den Punkt  $P_1^1$  nach dem Verhältnis  $\lambda$  geteilt, so heißt für gleiches  $\lambda$  der Ort aller  $P_1^1$  eine „ $\lambda$ -Zwischenfilarevolute“  $k_1^1$  von  $k$ . Alle zu  $P$  möglichen  $P_1^1$  liegen auf einer Geraden  $m_1^1$ , die wiederum eine Regelfläche  $\varphi_1^1$  erzeugt, welche als „ $\lambda$ -Zwischenevolutenfläche“ von  $k$  bezeichnet wird. Legt man durch  $k$  eine Torse  $\theta_{1\alpha}$ , deren Erzeugenden die Kurve unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden, so wird deren Gratlinie  $k_{1\alpha}$  die „ $\alpha$ -Evolutoide“ von  $k$  genannt. Zu den  $\alpha$ -Evolutoiden werden weiter noch die sog. „ $\lambda, \alpha$ -Zwischenevolutoiden“ konstruiert. Über die so definierten Gebilde werden viele Sätze vektoranalytisch hergeleitet. Hervorzuheben wäre eine Abbildung der Tangentialebene einer ebenen Kurve  $k$  auf die Punkte einer Ebene  $\pi$ , wobei den Torsen  $\theta_{1\alpha}$  Gerade in  $\pi$  entsprechen. Der Winkel in einer gemeinsamen Tangentialebene liegenden Erzeugenden zweier Torsen ist



ann gleich dem Schnittwinkel ihrer Bildkurven in  $\pi$ . Dies gibt Anlaß zur Definition einer „Isogonaltorsenkongruenz“ durch  $k$  u. ä. m. Eckhart (Wien).

**Delgelize, A.:** Sur les équations de Weingarten et les espaces pseudosphériques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **4**, 158—161 (1935).

L'auteur étudie le système  $U_{i,j} + MU_{g_{ij}} = 0$  ( $i, j = 1, 2 \dots n$ ) où  $U_{i,j}$  est la seconde dérivée covariante d'une fonction inconnue  $U$  par rapport au tenseur fondamental  $g_{ij}$  et  $M$  est une constante non nulle. Le nombre de dimensions  $n$  égal à 2, le système est intégrable si la courbure de  $g_{ij}$  est constante et égale à  $M$ . Si  $n > 2$  et la courbure de  $g_{ij}$  est constante, elle est nécessairement égale à  $M$  et l'espace en question est pseudosphérique. S. Finikoff (Moscou).

**Fabricius-Bjerre, Fr.:** Variétés développantes et variétés développées. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. **13**, H. 7, 1—10 (1935).

In  $S_{n+p}$  ( $\equiv V_{n+p}$  mit konstanter Krümmung), ( $p \geq n$ ), werden Paare von  $V_n$  ( $n \geq 2$ ) folgender Eigenschaft untersucht: „Die Tangentialräume von  $V_n^{(1)}$  sind normal zu  $V_n^{(2)}$ “. Die n. u. h. Bedingung dafür, daß eine  $V_n$  zugleich  $V_n^{(2)}$  wird, ist: „Auf dieser  $V_n$  existiert eine Kurvenkongruenz, längs welcher ein System von Normalen zu  $V_n$  eine „Torse“ bilden und die Hauptrichtungen des zweiten Fundamentaltensors, zu diesem Normalensystem gehört (und der den Rang  $n$  hat, wenn er nicht identisch verschwindet; Ref.) sind unbestimmt.“ Aus diesem Resultate lassen sich einige interessante Sätze ableiten, von welchen folgender als Beispiel zitiert werden soll: Eine  $V_n$  ist dann und nur dann eine  $V_n^{(1)}$ , wenn sie eine „Schursche Fläche“ ist. [Dazu vgl. Math. Ann. **27**, 560—562 (1886).] Hlavatý (Praha).

**Hamid, Husni:** Sur les variétés réglées d'ordre supérieur. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 911—1913 (1935).

Die Hauptergebnisse dieser Note lassen sich folgendermaßen formulieren: Längs einer  $p$ -dimensionalen Fläche  $r(u_1, \dots, u_p)$  in  $R_n$  ( $n > p$ ) soll eine Richtung  $\lambda(u_1, \dots, u_p)$  gegeben werden. Für die „Regelfläche“  $r + w\lambda$  gilt dann nicht nur die verallgemeinerte Hamiltonsche Formel

$$w = \sum_1^p w_h \cos^2 \omega_h,$$

sondern auch die verallgemeinerte Mannheimsche Formel

$$P = \sum_1^p P_h \cos \varphi_h,$$

wo die  $P_h$  und  $P$  Verteilungsparameter der elementaren Regelflächen sind. Hlavatý (Praha).

**Weise, K.H.:** Autoparallele Mannigfaltigkeiten im affin zusammenhängenden Raum. Math. Z. **40**, 208—220 (1935).

In einem affin zusammenhängenden Raum werden Affinorfelder, insbesondere  $q$ -Vektorfelder, betrachtet, die bezüglich einer  $p$ -dimensionalen Fläche  $X_p$  parallel sind (über  $X_p$  kovariant konstant). Für  $p = 1$  sind solche Felder immer möglich. Ist die Tangentialrichtung der  $X_1$  in der kovariant konstanten  $q$ -Richtung enthalten, so spricht man von einem autoparallelen Streifen, und es wird bewiesen, daß die  $X_1$  eben von der Dimension  $q$  ist. Ist  $p \geq 2$ , so existieren im allgemeinen keine über  $X_p$  kovariant konstante  $q$ -Vektorfelder ( $q < n$ ). Ist die tangentielle  $p$ -Richtung in der  $q$ -Richtung enthalten, so heißt die  $X_p$ , für  $p < q$ : eben von der Dimension  $q$ , für  $p = q$ : autoparallele Fläche der Dimension  $p$  (Geodätische  $X_p$ ) und für  $p > q$ : Zylinderfläche der Stufe  $q$ . Die Differentialgleichungen für diese  $X_p$  werden aufgestellt. J. Haantjes (Delft).

**Maxia, A.:** Sulla geometria proiettiva differenziale di una  $X_3^2$  in  $S_3$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 248—253 (1935).

$X_3^2$  est défini par une équation de Pfaff  $Pdx + Qdy + Rdz = 0$  (la condition d'intégrabilité non vérifiée). Il est bien connu [Voss, Math. Ann. **23**, 45 (1884);

Sincov, voir ce Zbl. 4, 418] la généralisation de la notion des plans tangents, des directions conjuguées, asymptotiques etc. pour  $X_3^2$ . L'auteur généralise la notion des tangentes des Darboux comme lieu des sommets des cônes  $C$  qui projettent deux asymptotiques issues d'un point  $P$  de  $X_3^2$  et dont le contact le long d'une génératrice commune est du 3<sup>me</sup> ordre; des arêtes de Green — comme une polaire de  $P$  par rapport au triangle déterminé par les sommets des cônes  $C$  dont le contact s'augmente jusqu'au 4<sup>me</sup> ordre. Il montre qu'il n'existe pas une généralisation des quadriques de Darboux, tandis que les directrices de Wilczynski se généralisent immédiatement.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Su, Buchin: On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes.** Tôhoku Math. J. 40, 408—420 (1935).

Soit  $(x)$  une surface donnée,  $y_1, y_2$  et  $z_1, z_2$  — les points où les droites de M. Demoulin associées au point  $x$  coupent les tangentes asymptotiques  $u = \text{const}$  et  $v = \text{const}$  respectivement,  $\Gamma_i$  et  $\Gamma'_i$  — les courbes décrites par  $y_i$  ou  $z_i$  quand  $x$  se déplace le long de  $u = \text{const}$  ou  $v = \text{const}$ . Cela posé, l'auteur considère les coniques  $K$  qui touchent  $\Gamma_i, \Gamma'_i$  aux points  $y_i, z_i$ . Si les asymptotiques de  $(x)$  appartiennent à des complexes linéaires, toutes les coniques  $K$  sont situées sur une quadrique  $Q$  qui contient également toutes les droites de M. Demoulin de  $(x)$ , donc enveloppe les quadriques de Lie et est une transformée asymptotique de  $(x)$ , vue que les deux tangentes menées de  $x$  à  $K$  engendrent des congruences  $W$ . Si l'on adopte  $Q$  comme absolue, les tangentes asymptotiques  $u = \text{const}$  le long de  $v = \text{const}$  de  $(x)$  deviennent parallèles au sens de Clifford, la première directrice de Wilczynski — normale à  $Q$  et la surface  $(x)$  — une surface à courbure totale zéro.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Su, Buchin: On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes.** Tôhoku Math. J. 40, 433—448 (1935).

L'auteur construit à un point  $x$  d'une surface  $(x)$  une quadrique  $Q$ , qui passe par la conique  $K$  (voir le réf. préc.) et par les droites de M. Demoulin associées à  $x$ . Si le plan polaire de  $x$  par rapport à  $Q$ , touche la quadrique de Lie, la surface  $(x)$  est minimale-projective. Si  $Q_1$  touche les surfaces flecnodales  $(y_i), (z_i)$  aux points homologues, les asymptotiques de  $(x)$  appartiennent à des complexes linéaires. Pour terminer il détermine toutes les surfaces dont les quatre plans qui touchent  $(y_i), (z_i)$  aux points homologues passent par un point situé sur la première directrice de Wilczynski.

*S. Finikoff (Moskau).*

**Takasu, Tsurusaburo: Eine Ergänzung zur Torsionstheorie im Laguerreschen Raume, II.** Proc. Imp. Acad. Jap. 11, 129—131 (1935).

Natürliche Gleichungen der  $L$ -Torsen im Laguerreschen Raume (vgl. dies. Zbl. 11, 223).

*H. Schatz (Innsbruck).*

## **Topologie:**

**Reidemeister, Kurt: Homotopieringe und Linsenräume.** Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 102—109 (1935).

Es sei eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer bestimmten Zellteilung versehen. Ihr entspricht eine bestimmte Zellteilung in der universellen Überlagerungsmannigfaltigkeit  $U$ . Nach Wahl eines Diskontinuitätsbereiches sind die Zellenketten in  $U$  als Linearformen darstellbar, deren Unbestimmte die Zellen des Diskontinuitätsbereiches und deren Koeffizienten die Elemente des „Gruppenringes“ der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{G}$  von  $M$  sind. Die Elemente des Gruppenringes sind die ganzzahligen Linearkombinationen der Elemente von  $\mathfrak{G}$ . Schreibt man die Ränder aller Zellen des Diskontinuitätsbereiches auf, so gewinnt man ein bestimmtes Relationensystem. Die Gesamtheit dieser Relationensysteme, die man so bei allen möglichen Zellteilungen von  $M$  erhält, bilden offenbar eine topologische Invariante von  $M$ . Es werden nun insbesondere diejenigen Relationensysteme betrachtet, die zu Zellteilungen mit je einer einzigen Zelle der Dimension 0 und 3 gehören — bekanntlich



Es sei jede dreidimensionale Mannigfaltigkeit auf eine solche „Normalform“ gebracht —, und es wird untersucht, wie man durch „elementare Umformungen“ von einer Normalform von  $M$  zu jeder anderen (äquivalenten) gelangen kann, und wie sich dabei die Berandungsrelationen in  $U$  ändern. Die Ergebnisse werden schließlich auf die Linsenräume angewendet. Hier ist die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{G}$  zyklisch von der Ordnung  $h$ , der Gruppenring also der Ring der ganzzahligen Polynome  $\text{mod } \gamma^h - 1$ . Dabei ist  $\gamma$  ein erzeugendes Element von  $\mathfrak{G}$ . Bei Benutzung des üblichen Linsenraumes (das freilich keine Normalform in dem vom Verf. definierten Sinne ist, aber sich trotzdem der Theorie unterordnen läßt) enthält der Diskontinuitätsbereich je eine Zelle der Dimension 0 bis 3:  $p, s, f, k$ , und die Berandungsrelationen lauten:  $\text{Rd } k = (\gamma - 1)f$ ,  $\text{Rd } f = (1 + \gamma + \dots + \gamma^{h-1})s$ ,  $\text{Rd } s = (\gamma^l - 1)p$ . Dabei ist  $l$  prim zur  $h$ . Es ist nun eine rein algebraische Frage, wann zwei solche Systeme von Berandungsrelationen, die sich durch den Wert von  $l$  unterscheiden, sich mit Hilfe der vorangestellten elementaren Umformungen ineinander transformieren lassen. Der dabei vorzunehmende Basiswechsel der Strecken- und Flächenketten wird durch allgemeine unimodulare Transformationen bewirkt, das sind solche, deren Determinante die Form  $\pm \gamma^m$  hat (womit nicht gesagt ist, daß der Gruppenring nicht noch andere Einheiten als die Potenzen  $\pm \gamma^m$  besitzt). Es zeigt sich, daß die bekannte hinreichende Bedingung für die Homöomorphie zweier Linsenräume  $(h, g)$  und  $(h, g')$  ( $0 < g < \frac{h}{2}$ ,  $0 < g' < \frac{h}{2}$ ,  $g \neq g'$ ), nämlich  $gg' \equiv \pm 1 \pmod{h}$ , auch notwendig ist. Damit ist das von H. Tietze gestellte und seitdem viel umworbene Homöomorphieproblem der Linsenräume gelöst.

H. Seifert (Dresden).

**Flexner, William W.:** The intersection of chains on a topological manifold. Amer. J. Math. 57, 309—321 (1935).

Es sei  $M_n$  eine topologische Mannigfaltigkeit (d. h. ein kompakter Raum mit einem endlichen Überdeckungssystem von Umgebungen  $E^1, E^2, \dots, E^r$ , welche kombinatorisches  $n$ -Zellen sind). Verf. beweist die grundlegenden Eigenschaften des Kroneckerkomplexes zweier beliebiger Ketten (chains) der Dimensionen  $p$  und  $n - p$  von  $M_n$ . (In früheren Arbeiten [Ann. of Math. 32, 393—406, 539—548 (1931); dies. Zbl. 2, 54] wies Verf. dasselbe, aber unter Benutzung eines Euklidischen Einbettungsraumes, was jetzt vermieden ist.) Das entscheidende Hilfsmittel ist der Schnittzykel  $\Gamma_h = p + q - n$  zweier beliebiger Ketten  $C_p$  und  $C_q$  von  $M_n$  der Dimensionen  $p$  und  $q$ , von denen keiner den Rand des anderen trifft. Derselbe wird folgendermaßen konstruiert:  $C_p$  wird in eine Kette  $A_p^1$  deformiert, indem der zu  $E^1$  fremde Teil unverändert bleibt und der Durchschnitt von  $C_p$  mit  $E^1$  in eine Kette  $C_p^1$  des Komplexes  $K^1$ , in  $E^1$  als kombinatorische  $n$ -Zelle darstellt, deformiert wird. Ähnlich wird  $C_q$  in  $A_q^1$  deformiert, wobei man bloß statt  $K^1$  den zu  $K^1$  dualen Komplex benutzt; der in  $E^1$  liegende Teil von  $A_q^1$  ist dann eine Teilkette  $C_q^{*1}$  dieses dualen Komplexes.  $A_p^1$  und  $C_q^{*1}$  liefern nun eine Schnittkette  $C_h^1$  (vgl. Lefschetz, Topology, Kap. IV). Ähnlich wie  $C_p$  und  $C_q$  mit Hilfe von  $E^1$  werden nun  $A_p^1$  und  $A_q^1$  mit Hilfe von  $E^2$  deformiert und liefern in  $E^2$  eine Schnittkette  $C_h^2$  usw. Nach  $r$  Schritten erhalten wir so  $r$  Schnittketten  $C_h^1, C_h^2, \dots, C_h^r$ , deren Ränder nun in geeigneter Weise verknüpft werden, um zu dem gesuchten Zykel  $\Gamma_h$  zu gelangen.

Nöbeling.

**Ursell, H. D.:** The Cantor manifolds lying on a closed surface. II. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 183—194 (1935).

Verallgemeinerung für  $n$  Dimensionen eines von Kaufmann (vgl. dies. Zbl. 10, 10) für  $n = 2$  bewiesenen Satzes betreffend die Existenz der  $n$ -dimensionalen konzentrischen Mannigfaltigkeitspunkte (im Sinne Kaufmanns) auf jedem Schnitt einer beliebigen  $n$ -dimensionalen regulären Gebietsgrenze des  $R^{n+1}$ . Diese Punkte bilden dabei eine mindestens eindimensionale Punktmenge. Verf. erwähnt dabei die von ihm in einer späteren Arbeit zu beweisende Tatsache, daß die Dimensionszahl 1 dabei

im allgemeinen nicht erhöht werden kann. Bei dem Beweise spielt der Fall  $n =$  eine besondere Rolle. P. Alexandroff (Moskau).

**Haratomi, Keitarô: On a problem of Hurewicz.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 149—150 (1935).

Es sei  $M$  ein metrischer separabler Raum. Hurewicz hat gezeigt: Wenn jedes unabzählbare stetige Bild von  $M$  ein dyadisches Diskontinuum (Hausdorff, Mengenlehre, S. 134) enthält, so enthält  $M$  zu jeder unabzählbaren Teilmenge  $N$  von  $M$  ein dyadisches Diskontinuum  $D$  mit der Eigenschaft  $\overline{D \cdot N} = D$  [Fundam. Math. 23, 55 (1934); dies. Zbl. 10, 40]. Hurewicz wirft die Frage auf (l. c.), ob auch die Umkehrung gilt. Verf. zeigt an einem Beispiel, daß dies nicht der Fall ist. Nöbeling.

**Alexandroff, Paul: Sur les espaces discrets.** C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1649—1651 (1935).

Verf. nennt eine Menge  $E$  beliebiger Elemente einen topologischen Raum, wenn in ihm gewisse Teilmengen (die leere Menge und  $E$  selbst sollen dazu gehören) abgeschlossen heißen, so daß das Produkt (Durchschnitt) beliebig (auch unendlich) vieler abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist. Die Komplemente der abgeschlossenen Mengen heißen offen und Umgebungen ihrer Elemente. Die abgeschlossene Hülle  $\bar{A}$  der Menge  $A$  ist das Produkt aller abgeschlossenen Mengen  $\supset A$ .  $E$  heißt ein diskreter Raum  $D$ , wenn auch die Summe endlich oder unendlich vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Jedes Element  $p$  von  $D$  liegt nicht nur in einer kleinsten abgeschlossenen Menge  $\bar{p}$ , sondern auch in einer kleinsten offenen Menge  $Op$ . Die Mengen  $\bar{p}$  und  $Op$ , wie auch die leere Menge und ganz  $D$ , heißen Elementarmengen. Es wird weiter vorausgesetzt das Trennungsaxiom: aus  $p \neq p'$  folgt  $Op \neq Op'$ . Multiplikationsaxiom: Das Produkt endlich oder unendlich vieler abgeschlossener Elementarmengen ist wieder eine solche. Dann ist auch das Produkt beliebig vieler offenen  $Op$  ein  $Op$ , dabei ist  $p_0$  dadurch definiert, daß  $\bar{p}_0$  das Produkt aller die  $\bar{p}$  enthaltenden abgeschlossenen Elementarmengen ist;  $\bar{p}_0$  heißt die algebraische Summe der  $\bar{p}$ . Dimensionsaxiome: Jede wohlgeordnete fallende bzw. wachsende Folge von abgeschlossenen Elementarmengen ist endlich. Das 1. dieser Axiome liefert für jedes  $p$  eine Dimension  $d(p)$ , das 2. eine Gegendimension  $c(p)$ ; die  $p$  mit  $d(p) = 0$  heißen Ecken (sie sind die abgeschlossenen Elemente  $p = \bar{p}$ ); die  $p$  mit  $c(p) = 0$  sind die offenen Elemente  $p = Op$ . 1. Basisaxiom: Die Ecken bilden eine Basis von  $D$  bezüglich der algebraischen Addition (jedes  $p$  ist also durch die Ecken von  $\bar{p}$  eindeutig bestimmt). Satz: Enthält  $D$  nur endlich viele Elemente und gilt das Multiplikations- und das 1. Basisaxiom, so ist  $D$  homöomorph einem diskreten Raum, bestehend aus Polyedern eines Euklidischen Raumes. 2. Basisaxiom: Für jede Menge  $U$  von Ecken eines  $\bar{p}$  existiert ein  $p'$ , so daß  $U$  die Menge aller Ecken von  $\bar{p}'$  ist. — Ein allen Axiomen genügender Raum heißt simplizial. Für jedes  $n$ -dimensionale  $p$  enthält  $\bar{p}$  genau  $n+1$  Ecken. Die simplizialen Räume sind Eckpunktbereiche, in denen sich eine kombinatorische Analysis situs aufbauen läßt. Nöbeling (Erlangen).

**Alexandroff, Paul: Sur les suites d'espaces topologiques.** C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1708—1709 (1935).

Ist  $(X_k)$  eine Folge topologischer Räume (zu den Begriffen vgl. vorst. Ref.) und gehört zu jedem  $k$  eine stetige Abbildung  $f_k$  von  $X_{k+1}$  auf  $X_k$ , so spricht Verf. von einem Spektralsystem  $(X_k, f_k)$ . Es erzeugt folgendermaßen den vollständigen Raum  $L = L(X_k, f_k)$  des Spektralsystems: Die Punkte von  $L$  sind die Spektralketten  $\xi = (x_1, x_2, \dots)$ , wo  $x_k \in X_k$  und  $x_k = f_k(x_{k+1})$ ; eine Umgebung von  $\xi$  entsteht, indem man für beliebiges  $k$  Umgebungen  $U(x_1), \dots, U(x_k)$  von  $x_1, \dots, x_k$  und alle Punkte  $\xi' = (x'_1, x'_2, \dots)$  mit  $x'_1 \in U(x_1), \dots, x'_k \in U(x_k)$  bestimmt.  $\xi$  enthält  $\xi'$ , wenn  $\bar{x}_k \supset \bar{x}'_k$  für jedes  $k$  gilt.  $\xi$  heißt minimal (maximal), wenn jedes in  $\xi$  enthaltene ( $\xi$  enthaltende)  $\xi'$  mit  $\xi$  identisch ist.  $(X_k, f_k)$  heißt offen (abgeschlossen), wenn jedes  $f_k$  jede offene (abgeschlossene) Menge in eine ebensolche abbildet. Es enthält



eine Kette eine minimale (liege in einer maximalen). Betrachtet man in  $L$  nur die minimalen (maximalen) Ketten, so erhält man einen Teilraum, welcher unterer (oberer) reduzierter Raum des Spektralsystems heißt. Verf. spricht folgenden Satz aus: Jeder höchstens  $n$ -dimensionale, metrische, kompakte Raum ist unterer reduzierter Raum eines offenen Spektralsystems, dessen Elemente höchstens  $n$ -dimensionale diskrete, endliche Räume sind und außerdem folgende Eigenschaft haben: Zu jedem  $k$  existiert ein  $h$ , so daß, wenn  $x_k$  und  $x'_k$  Elemente von  $X_k$ ,  $x_h$  und  $x'_h$  Elemente von  $X_h$   $x_k = f_k f_{k+1} \dots f_{h-1}(x_h)$ ,  $x'_k = f_k f_{k+1} \dots f_{h-1}(x'_h)$  und  $\bar{x}_k$  und  $\bar{x}'_k$  fremd sind,  $x_h$  und  $x'_h$  fremde Umgebungen in  $X_h$  haben. Umgekehrt ist der untere reduzierte Raum eines Spektralsystems mit den genannten Eigenschaften stets ein höchstens  $n$ -dimensionaler, metrischer, kompakter Raum. — Verf. spricht die Ansicht aus, daß man durch Spezialisierung der Spektralsysteme die klassische Analysis situs unter allgemeineren und natürlicheren Bedingungen aufbauen kann als mit Hilfe der Polyedertheorie.

Nöbeling (Erlangen).

Markoff, Andreas: Über endlich-dimensionale Vektorräume. Ann. of Math., II. s. 6, 464—506 (1935).

Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raumes eine Umgebung, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist, so ist er lokalbikompakt; ein solcher geht bei umkehrbar-stetigen Abbildungen (die offene Mengen auf offene Mengen abbilden) wieder in einen lokalbikompakten Raum über; umgekehrt ist eine stetige Abbildung doppelstetig (bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab), wenn der Bildraum lokalbikompakt ist und die Urbilder bikompakter Mengen bikompakt sind. — Sei jetzt  $T$  eine (additiv geschriebene) kommutative Gruppe und gleichzeitig ein topologischer Raum, so daß die Subtraktion eine stetige Funktion beider Variablen ist. Sind dann  $A$  und  $B$  bikompakte Teilmengen von  $T$ , so ist  $A - B$  (die Menge aller  $a - b$  mit  $a$  in  $A$ ,  $b$  in  $B$ ) bikompakt. Ist  $A$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $T$ , so ist die Zerlegung von  $T$  in Restklassen mod  $A$  eine stetige Zerlegung [im Sinne von R. Baer-F. Levi, Math. Z. 34, 110—130 (1931); dies. Zbl. 2, 160] von  $T$  und die Restklassengruppe  $T/A$  der Zerlegungs(gruppen)raum. Die „natürliche“ Abbildung von  $T$  auf  $T/A$  ist stetig, von minimaler Dichte (im Sinne von Baer-Levi, l. c. O.), umkehrbar-stetig und  $T/A$  ist mit  $T$  lokalbikompakt bzw. zusammenhängend. Stetige Homomorphismen von  $T$ , bei denen die Urbilder bikompakter Mengen bikompakt sind und die Bildgruppe lokalbikompakt ist, sind doppelstetig, von minimaler Dichte und also im wesentlichen durch die induzierte Zerlegung von  $T$  nach dem Urbild der Null bestimmt. — Sei überdies  $T$  lokalbikompakt und zusammenhängend, dann gibt es eine von endlich vielen Elementen erzeugte Untergruppe  $E$  und eine bikompakte Teilmenge  $F$ , so daß  $T = E + F$  ist; ist  $t(T)$  die kleinste Zahl von Erzeugenden, durch die geeignete Untergruppen  $E$  erzeugt werden, so wird  $t(T)$  bei stetigen Homomorphismen nicht größer und bleibt bei stetigen Homomorphismen mit bikompakten Urbildern bikompakter Mengen unverändert. Sind  $A, B$  Teilmengen von  $T$ ,  $A^*$  bzw.  $B^*$  die von  $A$  bzw.  $B$  erzeugten Untergruppen von  $T$ , so heiße  $A$  von  $B$  abhängig, wenn es eine bikompakte Teilmenge  $F$  von  $T$  gibt, so daß  $A^* \leq B^* + F$  ist. Abhängigkeiten werden von stetigen Homomorphismen übertragen, und Unabhängigkeiten bleiben bei stetigen Homomorphismen mit bikompakten Urbildern bikompakter Mengen erhalten. Die Maximalzahl unabhängiger Elemente in  $T$  ist genau  $t(T)$ . — Der  $n$ -dimensionale, reelle Vektorraum  $V(n)$  fällt unter den behandelten Typ topologischer Gruppenräume; es ist  $t(V(n)) = n$ . — In  $T$  gibt es eine eindeutig bestimmte, größte bikompakte Untergruppe  $K$ , und die Restklassengruppe  $T/K$  ist topologisch-isomorph dem Vektorraum  $V(t(T))$ ; die zugehörige stetige Abbildung von  $T$  auf  $V(t(T))$  hat bikompakte Mengen zu Urbildern bikompakter Mengen und ist hierdurch bis auf topologische Automorphismen von  $V(t(T))$  eindeutig bestimmt. Es wird vermutet, daß  $T$  direkte, topologische Summe von  $K$  und  $V(t(T))$  ist, und diese Vermutung ist, im Falle  $T$  separabel ist, von L. Pontrjagin [Ann. of Math.

35, 361—388 (1934); dies. Zbl. 9, 156] bewiesen worden.) Insbesondere ist ein topologischer Gruppenraum dann und nur dann einem Vektorraum topologisch-isomorph, wenn er lokalbikompakt, zusammenhängend, kommutativ ist und keine mehrpunktigen, bikompakten Untergruppen enthält; keine dieser Bedingungen ist entbehrlich. [Vgl. die Voranzeige: C. R. Acad. Sci., Paris 197, 610—612 (1933); dies. Zbl. 7, 360.]

*Reinhold Baer* (Manchester).

## Quantentheorie.

● **Planck, Max:** Die Physik im Kampf um die Weltanschauung. 2. unveränd. Aufl. Leipzig: J. A. Barth 1935. 32 S. RM. 1.50.

**Petiau, Gérard:** Sur une forme de l'équation du photon. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1829—1832 (1935).

Einige Umformungen der von de Broglie angegebenen Wellengleichung des Lichtquants. *P. Jordan* (Rostock).

**Ertel, H.:** Über das Massenverhältnis von Proton und Elektron. Physik. Z. 36, 464 bis 465 (1935).

● **Antunez de Mayolo, Santiago:** Une même équation pour le champ électromagnétique et le champ gravitationnel. Lima: Selbstverl. 1934. 25 S.

**Antunez de Mayolo, Santiago:** Le champ électromagnétique et les quanta. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1381—1383 (1935).

Im Anschluß an die Arbeiten von Louis de Broglie wird das elektromagnetische Vakuumfeld durch nichtkorpusskulare „Teilchenpaare“ erklärt, die freie mit Lichtgeschwindigkeit bewegte Ladungen von entgegengesetztem Vorzeichen sein und aufeinander Zentralkräfte ausüben sollen. Folgerungen aus dieser Vorstellung, die dem Ref. mehr als gewagt erscheinen. *Bechert* (Gießen).

**Awano, Tamotsu:** On Born's new field theory. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 127—136 (1935).

Es wird die Beziehung der neuen Bornschen Theorie zu den allgemein relativistischen Theorien von Weyl und Eddington untersucht. *O. Klein* (Stockholm).

**Schrödinger, E.:** Contributions to Born's new theory of the electromagnetic field. Proc. Roy. Soc. London A 150, 465—477 (1935).

Die Arbeit enthält eine Entwicklung der Bornschen Theorie in neuer mathematischer Gestalt; trotz der inhaltlichen Äquivalenz mit der Bornschen Theorie bedeutet jedoch diese Umformulierung wohl mehr als nur eine formale Vereinfachung, da sie wesentliche Punkte der Bornschen Theorie in ganz neuer Beleuchtung zeigt. Schrödinger benutzt statt der Bornschen Vektoren  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{D}$  die komplexen Variablen

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{B} - i\mathfrak{D}; \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{C} + i\mathfrak{H};$$

dann sind die komplex Konjugierten  $\mathfrak{F}^*$ ,  $\mathfrak{G}^*$  von  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  zugleich kanonische Konjugierte zu  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$ . Die Lagrangefunktion wird

$$L = \frac{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{G}^2}{(\mathfrak{F}\mathfrak{G})};$$

und es ist

$$\mathfrak{F}^* = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{G}} = -\frac{2\mathfrak{G}}{(\mathfrak{F}\mathfrak{G})} - \frac{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{G}^2}{(\mathfrak{F}\mathfrak{G})^2} \mathfrak{F}; \quad \mathfrak{G}^* = \text{entsprechend.}$$

Dabei soll der Sechservektor  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  die Rotation eines Vierervektors sein:

$$\text{rot } \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = 0; \quad \text{div } \mathfrak{F} = 0.$$

Dann erhält man die Bornschen Gleichungen (modifizierte Maxwellsche) in der Gestalt:

$$\text{rot } \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{F}} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{G}} \right) = 0; \quad \text{div } \left( \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{G}} \right) = 0.$$

Diese Neuformulierung hat die bemerkenswerte Eigenschaft, nur rationale Beziehungen zwischen den Feldgrößen zu enthalten, im Gegensatz zur Bornschen Theorie,



die von einer Quadratwurzel ausgeht. Dadurch ergibt sich dann aber, daß die Schrödingerschen Gleichungen zwei verschiedene Lösungstypen besitzen, welche den zwei Vorzeichenmöglichkeiten der Bornschen Quadratwurzel entsprechen. — Außer gegen Lorentztransformationen sind die Born-Schrödingerschen Gleichungen auch gegen Multiplikation von  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  mit  $e^{i\gamma}$  ( $\gamma$  = reell) invariant. *P. Jordan.*

**Born, M., and L. Infeld:** On the quantization of the new field theory. II. Proc. Roy. Soc. London A **150**, 141—166 (1935).

Nachdem früher gezeigt worden ist, daß die klassische (ungequantelte) Durchführung der Bornschen Elektrodynamik Lösungen ergibt, die einem klassisch aufgefaßten Elektron entsprechen, wird jetzt das Problem in Angriff genommen, die quantenmechanischen Gesetze für die Bewegung eines Elektrons aus der — mit gequantelten Feldstärken durchgeführten — neuen Feldtheorie herzuleiten. Für ein beliebiges elektromagnetisches System wird gezeigt, daß aus den quantenmechanischen Vertauschungsregeln der Feldstärkenkomponenten folgendes abzuleiten ist: 1. Die Komponenten des translatorischen Gesamtimpulses sind vertauschbar. 2. Die Koordinaten des Energieschwerpunkts zeigen gegenüber den Impulskomponenten die normalen Vertauschungseigenschaften der Quantenmechanik von Massenpunkten; dagegen sind sie 3. untereinander nicht vertauschbar. Das letztere überraschende Ergebnis besitzt eine tiefgehende Beziehung zur Diracschen Theorie des Spinelektrons: Die geraden Anteile der Elektronenkoordinaten der Diracschen Theorie besitzen dieselben Vertauschungseigenschaften untereinander und gegenüber Translations- und Drehimpuls wie die Schwerpunktskoordinaten bei Born-Infeld. Ferner ergibt sich bei Born-Infeld ein „inneres Drehmoment“, das Ähnlichkeiten mit dem Diracschen Spin besitzt. Es ist definiert durch  $\mathfrak{s} = \mathfrak{M} - \mathfrak{q} \times \mathfrak{p}$ , wo  $\mathfrak{M}$  der elektromagnetische Gesamtdrehimpuls ist,  $\mathfrak{q}$  die Schwerpunktskoordinaten,  $\mathfrak{p}$  der translatorische Impuls. (I. vgl. dies. Zbl. **10**, 325.) *P. Jordan (Rostock).*

**Pryce, M. H. L.:** Commuting co-ordinates in the new field theory. Proc. Roy. Soc. London A **150**, 166—172 (1935).

Bei Born-Infeld (vgl. das vorst. Ref.) gelten für Schwerpunktsvektor  $\mathfrak{q}$  und inneres Drehmoment  $\mathfrak{s}$  eines elektromagnetischen Systems die Vertauschungsregeln

$$[\mathfrak{q}_x, \mathfrak{q}_y] = W^{-2} \mathfrak{s}_z; \quad [\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y] = -\mathfrak{s}_z + W^{-2} (\mathfrak{s} \mathfrak{p}) \mathfrak{p}_z;$$

dabei ist  $\mathfrak{p}$  der Translationsimpuls. Es wird nun gezeigt, daß

$$\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} + \left(1 - \frac{W}{W_0}\right) p^{-2} \cdot \mathfrak{p} \times \mathfrak{s},$$

$$\bar{\mathfrak{s}} = \frac{W}{W_0} \mathfrak{s} + \left(1 - \frac{W}{W_0}\right) p^{-2} (\mathfrak{s} \mathfrak{p}) \mathfrak{p}$$

(also Größen, die sich von  $\mathfrak{q}$ ,  $\mathfrak{s}$  nur durch relativistische Korrekturen unterscheiden) die erwünschten Eigenschaften

$$[\bar{\mathfrak{q}}_x, \bar{\mathfrak{q}}_y] = 0; \quad [\bar{\mathfrak{s}}_x, \bar{\mathfrak{s}}_y] = -\bar{\mathfrak{s}}_z$$

haben; auch die Vertauschungen von  $\bar{\mathfrak{q}}$  mit  $\mathfrak{p}$  sind die normalen, und  $\bar{\mathfrak{q}}$  ist mit  $\bar{\mathfrak{s}}$  vertauschbar. Ferner ist  $\bar{\mathfrak{s}}^2$  relativistisch invariant. *P. Jordan (Rostock).*

**Glaser, Walter:** Korpuskel und Lichtquanten. Z. Physik **94**, 677—691 (1935).

Verf. entwickelt die Gastheorie relativistisch bewegter Teilchen, die der Bosestatistik genügen. Als Grenzfälle sind hier die Lichtquanten (verschwindende Ruhmasse, große Teilchendichte) einerseits, die Korpuskeln des materiellen Gases (große Ruhmasse, geringe Teilchendichte) andererseits einbegriffen. In der Formel für die Anzahl der Teilchen pro  $\text{cm}^3$  mit Energien zwischen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon + d\varepsilon$

$$\varrho(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi}{h^3 c^3} \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}{1} d\varepsilon$$

$$\frac{1}{\lambda} e^{\varepsilon/kT} - 1$$

( $\varepsilon_0$  Ruhenergie) wird der „Entartungsparameter“  $\lambda$  aus der Gesamtzahl  $n$  der Teilchen pro  $\text{cm}^3$  durch Auflösung der Gleichung

$$n = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \varrho(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi\varepsilon_0^3}{h^3c^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu} \frac{K_2(\alpha\nu)}{\alpha\nu}; \quad \alpha = \frac{\varepsilon_0}{kT}$$

nach  $\lambda$  bestimmt ( $K_2$  Besselsche Funktion). — Ferner werden für die Energiedichte  $u$  pro  $\text{cm}^3$  und für den Druck  $p$  analoge Entwicklungen nach Potenzen von  $\lambda$  aufgestellt und für verschiedene Grenzfälle spezialisiert. *V. Fock* (Leningrad).

**Benham, W. E.:** *Electronic theory and the magnetron oscillator.* Proc. Physic. Soc., London **47**, 1—53 (1935).

Verf. untersucht die Geschwindigkeits- und Potentialverteilung der Elektronen in einem Magnetron-Oszillator (Feld nur von  $x$  und  $t$  abhängig, Magnetfeld konstant). Zunächst wird die Bewegung einzelner Elektronen verfolgt (Punktmechanik). Da aber der Übergang zu den Eulerschen Variablen Schwierigkeiten bietet, werden die Gleichungen direkt in diesen Variablen geschrieben. Die Ausgangsgleichung lautet dabei

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 U_x = 4\pi \frac{e}{m} c^2 J_x - \omega^2 U_x$$

( $U_x$  Geschwindigkeits-,  $J_x$  Stromkomponente). Diese Gleichung wird für verschiedene Spezialfälle integriert, indem  $U_x = \bar{U} + u$ ;  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  gesetzt wird und die zweite und die höheren Potenzen von  $u$  vernachlässigt werden. Einige typische Beispiele werden numerisch durchgerechnet. *V. Fock* (Leningrad).

**Witmer, E. E., and J. P. Vinti:** *Symmetry properties and the identity of similar particles.* Physic. Rev., II. s. **47**, 538—541 (1935).

Unter den Annahmen, daß eine Permutation von identischen Teilchen keine meßbaren Eigenschaften des Teilchensystems beeinflußt, während sie die Eigenfunktionen des Systems in andere mögliche Eigenfunktionen überführt, wird gezeigt, daß die Eigenfunktionen notwendig symmetrisch oder antisymmetrisch in den identischen Teilchen sein müssen. *O. Klein* (Stockholm).

**Sommerfeld, A., und A. W. Maue:** *Verfahren zur näherungsweisen Anpassung einer Lösung der Schrödinger- an die Diracgleichung.* Ann. Physik, V. F. **22**, 629—642 (1935).

Es wird die Aufgabe behandelt: Gegeben eine Lösung der gewöhnlichen Schrödingergleichung für ein stationäres Einkörperproblem mit potentieller Energie, aber ohne Vektorpotential; gesucht die Lösung  $\psi$  der entsprechenden Diracgleichung. Die Verf. entwickeln  $\psi$  in eine Potenzreihe nach  $\alpha Z$ :  $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$ ;  $\psi_0$  unterscheidet sich in allgemein angebar Weise von der bekannten Schrödingerlösung des Problems. Es gelingt, die erste Näherung  $\psi_1$  im wesentlichen durch Differentiation aus  $\psi_0$  zu gewinnen. Die Methode wird auf die Beugung einer ebenen Elektronenwelle im Coulombfeld eines Atomkerns angewandt und liefert die aus den Arbeiten von Mott, Sauter, Scherzer, Meixner, Furry bekannten Resultate. *Bechert*.

**Hartree, D. R., and W. Hartree:** *Self-consistent field, with exchange, for beryllium.* Proc. Roy. Soc. London A **150**, 9—33 (1935).

Die Fockschen Gleichungen für das self-consistent field eines Atoms werden für den Grundzustand des Be numerisch gelöst. Genaue Beschreibung des Verfahrens und von Kriterien für die Richtigkeit der Rechnungen. Die Berücksichtigung des Austausches, die für die Focksche Methode charakteristisch ist, ändert die Eigenfunktion 1 s weniger stark als 2 s. Letztere wird in Kernnähe kleiner und im ganzen auf ein kleineres Gebiet zusammengeschoben. Die Änderungen liegen in der aus dem Vergleich mit experimentellen Atomkonstanten zu fordernden Richtung. Die Übereinstimmung des Eigenwertes mit den Beobachtungsdaten wird gegenüber der ursprünglichen Hartreeschen Methode nur wenig besser. Die Verf. glauben, daß die Focksche Methode die Eigenfunktionen im allgemeinen wesentlich, die Eigenwerte dagegen unwesentlich verbessern wird.

*Bechert* (Gießen).



**Crawford, M. F.:** Hyperfine structure formulae for the configuration  $d^2s$ . Application to  $5d^2 6s^4F$  states of La I. *Physic. Rev.*, II. s. 47, 768—777 (1935).

Berechnung der Hyperfeinstrukturaufspaltung für die Konfiguration  $d^2s$  bei mittlerer Kopplung. Anwendung auf die Konfiguration  $5d^2 6s$  des nichtionisierten Lanthans, wo sich befriedigende Übereinstimmung ergibt. *R. de L. Kronig.*

**Pincherle, Leo:** L'effetto Auger. *Nuovo Cimento*, N. s. 12, 81—92 (1935).

Es wird, mit Hilfe von wasserstoffähnlichen Eigenfunktionen, die Wahrscheinlichkeit des Augereffektes für  $s$ - und  $p$ -Elektronen leichter Elemente berechnet. Die Resultate sind in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Werten. *Peierls.*

**Finkelnburg, Wolfgang:** Aufgaben und Ergebnisse der Untersuchung kontinuierlicher Spektren. *Naturwiss.* 23, 330—336 (1935).

Kurzer zusammenfassender Bericht über Ursprung und Bedeutung der kontinuierlichen Gasspektren. *R. de L. Kronig* (Groningen).

**Born, Max:** On the theory of optical activity. I. General theory of a system of coupled isotropic oscillators. II. Molecules with a binary axis of symmetry. *Proc. Roy. Soc. London A* 150, 84—105 (1935).

The contents of this important and interesting paper is summarized by the author as follows: "The paper contains a detailed development of the theory of rotatory power given by the author in 1915. The molecule is considered as consisting of a set of isotropic oscillators coupled by Coulomb forces. The interaction is calculated by the perturbation method. The resultant formula is rather complicated but can be simplified very much for special cases. A molecule consisting of two equal pairs of oscillators perpendicular to one another and to their central line is worked out in detail; it gives the angle of rotation of the expected order of magnitude."

*V. Fock* (Leningrad).

**Allen, H. S., and A. K. Longair:** Internuclear distance and vibration frequency in diatomic molecules. *Philos. Mag.*, VII. s. 19, 1032—1041 (1935).

Für die Beziehung zwischen Kernabstand  $r$  und Wellenzahl  $\omega$  der Grundschiwingung entlang der Achse zweiatomiger Moleküle setzen Verff. die empirische Gleichung  $\omega r^3 \sqrt{\mu} = \text{konst.}$  an, wo der Faktor  $\sqrt{\mu}$  ( $\mu$  = reduzierte Masse) den bekannten Erscheinungen der Isotopenspektren Rechnung tragen soll. Der Wert der Konstanten, der in den meisten Fällen — mit Ausnahme der Hydride — der Zahl der vollen Schalen proportional ist, beträgt z. B. für Moleküle, bei denen jedes Atom eine volle  $K$ -Schale hat,  $10,602 \cdot 10^{-33} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^2$ .

*Henneberg* (Berlin).

**Rosenthal, Jenny E.:** Intensities of vibration rotation bands. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 21, 281—285 (1935).

Die Intensitäten der Rotationsschwingungsbanden des HCl, die Dunham genähert gerechnet hat, lassen sich, wie Verf. zeigt, bei Zugrundelegung der Morseschen Potentialfunktion zwischen den Kernen auch exakt berechnen. Es handelt sich dabei um Berechnung der Matrixelemente  $\int \varphi_v P \varphi_{v'} dr$ , wo  $\varphi_v$  die Wellenfunktion des Oszillators im Morseschen Potentialfeld und  $P$  das elektrische Dipolmoment ist, das als Funktion des Kernabstandes aufgefaßt wird. In erster Näherung werden nur das konstante und lineare Glied einer Reihenentwicklung von  $P$  um den Wert in der Gleichgewichtslage berücksichtigt. Ein Vergleich mit dem Experiment gestattet den Nachweis, daß  $P''$  sehr klein ist.

*Henneberg* (Berlin).

**Vercelli, Carlo Mussa Ivaldi:** Effetto fotoelettronico di metalli incandescenti. *Atti Accad. Sci. Torino* 70, 462—471 (1935).

La teoria dell'effetto fotoelettronico di superficie (effetto Hallwachs), proposta dal Fowler, permette di confermare che l'effetto fototermoelettronico osservato da Deaglio è un effetto Hallwachs generato ad elevata temperatura da luce di frequenza notevolmente inferiore alla frequenza limite fotoelettronica.

*Autoreferat.*

**Thompson, J. H. C.:** On the spectrum of the normal frequencies of a polar crystal lattice. I. General theory. Proc. Roy. Soc. London A **149**, 487—505 (1935).

Die vom Verf. und Born entwickelte Methode zur Berechnung des elastischen Spektrums [Proc. Roy. Soc. London A **147**, 594 (1934); dies. Zbl. **10**, 431] wird in allgemeiner Form durchgeführt und auf eine solche Gestalt gebracht, daß sie numerisch ausgewertet werden kann.

*R. Peierls (Manchester).*

**Tunazima, Nagatosi:** Thomsons Effekt und Ferromagnetismus. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **17**, 119—126 (1935).

Es wird vorgeschlagen, das anomale Verhalten des Thomsons Effektes bei Ferromagneten nicht darauf zurückzuführen, daß die ferromagnetischen Elektronen mit den Leitungselektronen identisch sind, sondern daß die ungeordnete spontane Magnetisierung innere Spannungen verursachen soll, die eine zusätzliche stark temperaturabhängige Stoßwahrscheinlichkeit der Elektronen bedingen. Eine Abschätzung des Effekts zeigt jedoch, daß er um einen Faktor 40 kleiner ist als der für Nickel gemessene Wert.

*R. Peierls (Manchester).*

**Wasastjerna, Jarl A.:** Zur atomistischen Theorie der Kompressibilität. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. **8**, Nr 8, 1—15 (1935).

Vom Verf. ist früher [Soc. Sci. Fennicae Comment. phys.-math. **6**, Nr 19 (1932); dies. Zbl. **6**, 189] auf Grund wellenmechanischer Betrachtungen ein empirischer Ausdruck für das Abstoßungspotential zweier Ionen aufeinander angegeben worden. Daran wird jetzt die Kompressibilität, und die Temperatur- und Druckkoeffizienten der Kompressibilität, für die Alkalihalogenide berechnet. Die theoretischen Werte stimmen mit den beobachteten befriedigend überein.

*Bechert (Gießen).*

**Wasastjerna, Jarl A.:** Über die elastischen Konstanten der Alkalihalogenide. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. **8**, Nr 9, 1—9 (1935).

Der Zusammenhang zwischen der Kompressibilität, der Dichte und den Elastizitätskonstanten der Alkalihalogenkristalle wird durch die Annahme erklärt, daß in einem Ionengitter bei der Berechnung des Abstoßungspotentials nur die elektrostatischen Summen über das ganze Gitter auszudehnen sind, während die übrigen Kräfte nur zwischen dem betrachteten Ion und seinen unmittelbaren Nachbarn mit merklicher Stärke wirken. Die Kristallkonstante  $c_{12}$  kann aus dem Gitterabstand berechnet werden ohne Kenntnis der Kompressibilität oder der analytischen Form der Abstoßungskraft zwischen den Ionen.

*Bechert (Gießen).*

**Srétensky, L. N.:** Sur le réchauffement des fluides par des corps solides. Appl. Math. a. Mech. **2**, 163—179 u. franz. Zusammenfassung 179 (1935) [Russisch].

Verf. gibt eine Ableitung der Kirchhoffschen Gleichung für die Wärmeleitung mit Konvektion und spezialisiert diese Gleichung auf den Fall einer stationären ebenen Flüssigkeitsströmung mit Geschwindigkeitspotential. Sodann betrachtet Verf. das Problem der Bestimmung der Temperaturverteilung in der Flüssigkeit unter der Annahme, daß die Temperatur 1. auf einer unendlichen Halbgeraden, 2. auf einer endlichen geradlinigen Strecke gegeben ist (die Halbgerade bzw. die geradlinige Strecke soll einen Teil der Stromlinie bilden). Das Problem wird unter Anwendung der konformen Abbildung durch Reihenentwicklung nach den Tschebyscheffschen Polynomen bzw. nach den Laméschen Funktionen gelöst.

*V. Fock (Leningrad).*

**Blackman, M.:** Contributions to the theory of specific heat. III. On the existence of pseudo- $T^3$  regions in the specific heat curve of a crystal. Proc. Roy. Soc. London A **149**, 117—125 (1935).

Bei der Diskussion von Messungen der spezifischen Wärme von Kristallen wird häufig die mit Hilfe der Debyeschen Formel aus der spezifischen Wärme bei einer bestimmten Temperatur berechnete charakteristische Temperatur  $\theta$  angegeben. Es wird durch eine Diskussion des elastischen Spektrums gezeigt, daß dieses  $\theta$  als Funktion der Temperatur nicht monoton zu sein braucht. Aus der Tatsache, daß in einem kleinen Temperaturbereich  $\theta$  annähernd konstant wird, darf man daher noch nicht schließen,



daß man das asymptotische Gebiet konstanten  $\theta$  erreicht hat. (II. vgl. dies. Zbl. 10, 431.)

*Peierls* (Manchester).

**Blackman, M.:** Contributions to the theory of specific heat. IV. On the calculation of the specific heat of crystals from elastic data. Proc. Roy. Soc. London A 149, 126 bis 130 (1935).

Es wird eine Methode angegeben, um die Verteilung der extrem langwelligen elastischen Schwingungen (Schallwellen) aus den elastischen Konstanten zu berechnen und damit den Faktor des  $T^3$ -Gesetzes der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen zu bestimmen.

*R. Peierls* (Manchester).

**Nordheim, L.:** Sur la production des paires par des chocs de particules. J. Physique Radium, VII. s. 6, 135—136 (1935).

Es wird die Wahrscheinlichkeit für die Bildung von Elektronenpaaren beim Zusammenstoß zwischen einem Atomkern und einem schnellen Elektron abgeschätzt, indem das Coulombfeld des relativ zum Elektron bewegten Kerns nach v. Weizsäcker (und Williams) durch ein möglichst entsprechendes Strahlungsfeld ersetzt wird.

*O. Klein* (Stockholm).

## Klassische Theorie der Elektrizität.

**Odono, F.:** Fondamenti termodinamici della teoria dell'equilibrio elettrico e delle correnti permanenti nei conduttori metallici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 515—521 (1935).

**Bowman, F.:** Notes on two-dimensional electric field problems. Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 205—215 (1935).

Verf. befaßt sich mit dem zweidimensionalen Analogon des elektrischen Feldes zwischen den beiden Platten eines Kondensators. Er geht von der bekannten Lösung aus, welche durch konforme Abbildung mittels elliptischer Funktionen erhalten wird, und zeigt, wie aus dieser Lösung in einfacher Weise ein Näherungswert für die Kapazität berechnet werden kann für jedes Verhältnis von Breite zum Abstand der Platten. Eine Tabelle für die Hilfswerte ist beigelegt. Im zweiten Teil der Arbeit behandelt Verf. das elektrische Feld, welches entsteht durch eine endliche Platte zwischen zwei unendlich ausgedehnten leitenden Platten, auch wieder zweidimensional. Die lösende Abbildung ergibt sich in vorliegendem Falle durch den Logarithmus des Quotienten zweier Thetafunktionen. Auch in diesem Falle geht Verf. auf die Berechnung der Kapazität bis zur numerischen Ausarbeitung ein. Das dritte Problem besteht im zweidimensionalen Feld zwischen zwei leitenden Quadraten. Auch in diesem Falle führt die lösende Abbildung auf elliptische Funktionen. Die Kapazität wird berechnet. Das letzte Problem umfaßt den Beweis eines einfachen Satzes über den elektrischen Widerstand eines Leiters von beliebigem Querschnitt mit einer Symmetrieachse.

*Strutt.*

**Chipart, H.:** Sur les milieux déformables polarisés et aimantés parcourus par des courants. I. J. École polytechn., II. s., cahier 33, 215—286 (1935).

Studie über das innere elastische Potential eines Mediums, das deformierbar ist, von räumlich und flächenhaft verteilten Strömen durchflossen wird und polarisierbar und magnetisierbar ist. Dazu entwickelt der Verf. allgemeine Vektorformeln, welche die Änderung eines Vektors im deformierten Medium durch die Größe im undeformierten Zustand ausdrücken. Unter anderem wird das Beispiel behandelt: Gegeben die Änderung der Polarisierung bei der infinitesimalen Deformation, gesucht die dabei auftretende Änderung der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Verschiebung usw. Verf. zeigt, von welchen Größen das innere Potential allein abhängen kann, daß es für das Potential 4 anscheinend recht verschiedene, mathematisch und physikalisch aber doch gleichwertige Formen gibt und formuliert die Gleichgewichtsbedingungen unter Berücksichtigung der elektrischen und magnetischen Einflüsse.

*Bechert* (Gießen).



**Mieghem, Jacques van:** La vitesse de transport de l'énergie électromagnétique. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1735—1737 (1935).

Gegeben ein Medium, das gleichmäßig von Ionen erfüllt ist und durch das ebene elektromagnetische Wellen laufen. Der Energiesatz wird im Sinne anschaulicher Deutung durch die Ionendaten umgeformt und dem Poyntingschen Vektor der Energieströmung ein Geschwindigkeitsvektor des Energietransportes zugeordnet. *Bechert*.

**Henriot, E.: L'aspect antisymétrique de l'électromagnétisme: torque et momentor.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 29—37 (1935).

Der Verf. schlägt den Namen „tenseur-torque“ für den antisymmetrischen Tensor  $\gamma$  des elektromagnetischen Feldes vor; die Größe  $A$ , die durch vierdimensionale Divergenzbildung mit  $\gamma$  zusammenhängt:  $\text{Div } A = -\gamma$ , nennt er „momentor“. Diese Definitionen erläutert er am Beispiel einer elliptisch polarisierten ebenen, räumlich gedämpften Welle, die sich in einem absorbierenden Medium fortpflanzt. *Bechert*.

**Henriot, E.: L'aspect antisymétrique de l'électromagnétisme: Torque et momentor. (II. comm.)** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 127—137 (1935).

Erläuterung des „torque“- und „momentor“-Begriffes (s. vorst. Ref.) am Beispiel eines Mediums, in dem sich zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen mit verschiedener Phasengeschwindigkeit fortpflanzen. Betrachtungen über die kovariante Formulierung von elektrodynamischen Feldgrößen, die der Verf. in einer früheren Mitteilung definiert hatte (Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. des Sci. **1927**, 140).

*Bechert* (Gießen).

**Henriot, E.: Les moments électromagnétiques.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 363—374 (1935).

Verf. überträgt seine Betrachtungen (s. vorst. Ref.) auf die Gleichungen der Lorentzschen Elektronentheorie. Er definiert ein Drehmoment der elektromagnetischen Kraftdichte, das sich durch vierdimensionale Divergenzbildung aus einem Tensor des Impulsmoments ableiten läßt. Erläuterung an Beispielen. *Bechert* (Gießen).

**McLachlan, N. W., and A. A. Meyers:** Eddy current loss in tube in axial alternating magnetic field. Philos. Mag., VII. s. **19**, 846—849 (1935).

The analysis of a former paper (Philos. Mag., VII. s. **18**, 610 (1934); this Zbl. **10**, 115] is extended by dropping the restriction ( $b \ll a$ ) to thick tubes. The new results are valid whenever the permeability is constant and electromagnetic radiation from the tube is negligible. The power loss in the tube is computed with the aid of Poynting's theorem. The resulting formula, in its general form, is useful for the case of a very thin non-magnetic tube at medium radio frequencies. *H. Bateman* (Pasadena).

**Sah, A. Pen-Tung:** Representation of Stokvis-Fortescue transformation by a dyadic and the invariants of a polyphase impedance. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **3**, 27—36 (1935).

Die Stokvis-Fortescue-Transformation drückt die Phasenspannungen oder -ströme eines beliebigen Drehstromsystems (linear) durch die dreier „Normalsysteme“ aus, welche durch Phasengleichheit bzw. positiven oder negativen Umlaufssinn gekennzeichnet sind. Durch Anwendung der Tensorrechnung werden diese Beziehungen mittels einer unitären Transformation unmittelbar erhalten. Die 3 skalaren Invarianten des Systemtensors haben einfache elektrische Bedeutungen, sie geben nämlich die Stromverteilungen für die drei Haupt-Kurzschlußfälle. *Baerwald* (Wembley).

**Sah, A. Pen-Tung:** Reciprocals of incomplete dyadics and their application to three-phase electric circuit theory. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **3**, 37—55 (1935).

Erweiterung und Anwendung der Gibbsschen Dyadenrechnung in drei Dimensionen auf Drehstromprobleme. Eine besondere Rolle spielen dabei die Reziproken gewisser „unvollständiger“, d. h. singulärer Tensoren, die bei Erfüllung entsprechender Linearbeziehungen eindeutig definiert sind. Diese Beziehungen entsprechen speziellen, im allgemeinen symmetrischen Eigenschaften des Drehstromsystems. *Baerwald*.



**Sah, A. Pen-Tung:** Equivalent three-phase networks. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 57—63 (1935).

Aus der bekannten Tatsache, daß Reihen- und Parallelschaltung von elektrischen Mehrpolen (unter gewissen Voraussetzungen, die aber nicht aufgeführt werden) durch Addition der entsprechenden Scheinwiderstände- bzw. Scheinleitwertmatrizen ausgedrückt werden, werden allgemeine Ersatzschaltungen für Drehstromsysteme hergeleitet, die aus den beiden Grundtypen: Stern und Dreieck ohne neutrale Mitte, zu zusammengesetzt sind.

*Baerwald (Wembley).*

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Bilimovitch, Anton:** Über ein Modell zur Demonstration der säkularen Polverlagerungen. Publ. Math. Univ. Belgrade 3, 225—228 (1934).

**Prey, A.:** Über die Elastizitätskonstante der Erde. (II. Mitt.) Gerlands Beitr. Geophys. 44, 59—80 (1935).

The problem of determining the rigidity of the earth's interior from the difference between the Eulerian and the Newcombian period of the variation of latitude is treated. Neglecting compressibility, the rigidity  $n$  is assumed to be expressible in the form  $n = n_c c_1^2 (1 - \eta c_1^2)$ , where  $c_1$  denotes distance from the center, with the earth's radius as unity. A rigidity of  $3 \times 10^{17}$  c.g.s. is assigned to the surface, on the basis of the propagation of seismic waves, and a Roche law of density,  $\rho = 10.1 (1 - .764 c_1^2)$  is assumed. The equations of motion are derived by application of Hamilton's principle. In the expression for the kinetic energy, second order terms in the perturbations are retained. The resulting expression for the Newcombian period differs somewhat from earlier less precise forms. From the revised expression a value .22 instead of the former values .28 is obtained for the number  $h$  which characterizes the variation of the potential associated with the tidal strains. The author finds that the rigidity is expressed by  $n = c_1^2 (1 - .97 c_1^2) 10^{13}$  c.g.s. The associated value for the ratio  $\gamma$  is .805, which is nearer to Schweydar's value of .84 than to the value .69 found by Michelson and Gale. (Here  $\gamma$  is the ratio which the equilibrium tidal displacement of sea level relative to a yielding earth bears to the corresponding displacement on a perfectly rigid earth.)

*Louis B. Slichter (Cambridge, Mass.).*

**Balandin, A. A.:** Structure theory of chemical change. Complete system of doublet reactions. Acta physicochim. (Moskva) 2, 177—202 (1935).

Im Anschluß an die quantentheoretische Deutung der chemischen Bindung durch die Spinvalenz wird eine Systematik der chemischen Reaktionen versucht.

*F. Hund (Leipzig).*

**Stevenson, A. F.:** On the theoretical determination of earth resistance from surface potential measurements. Philos. Mag., VII. s. 19, 297—306 (1935).

The problem of determining the variation of electrical resistance with depth from observations of electrical potentials at the surface is treated by means of Fourier series. With the source electrode at the surface of the earth as origin of a cylindrical coordinate system, attention is confined to a cylindrical region of radius and depth so great that the perturbation potential and its first derivative are essentially zero at the distant boundaries. The conductivity is assumed to be expressible as a Fourier cosine series in  $z$ ; similarly, the perturbation potential is expressed as a cosine series in  $z$  and  $r$ , whereby all boundary conditions are fulfilled. By substitution of these series in the differential equation governing the current flow an infinite system of linear equations is developed, for determining the Fourier coefficients in the expansion for the conductivity when those in the expression for the surface potential are known. The coefficients in this set of linear equations are independent of conductivity and may be calculated once and for all. Attention is directed to the application of variational methods to the solution of current flow problems.

*L. B. Slichter (Cambridge).*



**Shiratori, Katsuyoshi: Ionic balance in air and nuclei over ocean.** Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. **10**, 175—201 (1934).

Der Autor untersucht das Ionengleichgewicht in der Luft und findet unter Zuhilfenahme der Gleichgewichtsbedingung zwischen leichten und schweren Ionen die geographische Verteilung der Kerne über dem Ozean aus den Beobachtungsergebnissen der „Carnegie“.

J. N. Hummel (Berlin).

**Nomitsu, Takaharu: Coast effect upon the ocean current and the sea level. II. Changing state.** Mem. Coll. Sci. Kyoto A **17**, 249—280 (1934).

Der Küsteneinfluß auf Meeresströme wird untersucht unter Berücksichtigung der Corioliskraft, aber mit der gewöhnlich verwendeten Bewegungsgleichung, so daß die Horizontalkomponente an der Küste nicht zum Verschwinden gebracht werden kann (vgl. nachst. Ref.). Sobald die Ursache des Stromes zu wirken beginnt (Wind, Luftdruckgradient u. ä.), tritt an der Küste eine endliche Neigung der Oberfläche auf. Die Grenzbedingung am Meeresboden, keine Bodenreibung oder kein Bodenstrom, hat auf die Größe der anfänglichen Oberflächenneigung keinen Einfluß. Der Übergang zur Neigung, die dem stationären Fall entspricht, folgt einem zeitlichen Exponentialgesetz. Die Neigung an der Küste breitet sich angenähert mit einer Geschwindigkeit  $\sqrt{gH}$  seewärts aus ( $H$  Tiefe des Meeres), für beide Bodenbedingungen. Die durch die Küste gestörte Strömung kann in einen primären Bestandteil zerlegt werden, der die Strömung in einem Meer ohne Küste darstellt, und einen sekundären, der als die durch die Störung der Meeresoberfläche erzeugte Strömung angesehen werden kann. Numerische Beispiele für die behandelten Fälle werden gegeben. (I. vgl. dies Zbl. **10**, 46).

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).

**Takegami, Tohichiro: The boundary value problem of the wind current in a lake or a sea.** Mem. Coll. Sci. Kyoto A **17**, 305—318 (1934).

Es wird ein See von gleichförmiger Tiefe betrachtet, dessen eines Ende von einem vertikalen Wall begrenzt ist. Der Wind weht normal zur Küste, aber nur bis zu einem Abstand  $x = l$  von der Küste, so daß die mitschleppende Kraft des Windes näher der Küste konstant ist und in einem Abstände  $> l$  verschwindet. Neben dem vertikalen Austauschglied  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  muß auch das horizontale  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  berücksichtigt werden zur vollständigen Lösung des Problems. In Küstennähe wird der letzte Ausdruck sogar größer als der erste. Neben den üblichen Grenzbedingungen kann noch die Forderung erfüllt werden, daß die Geschwindigkeit  $u$ ,  $\mu \frac{\partial u}{\partial x}$  und die Erhebung der freien Oberfläche über die Gleichgewichtslage  $\zeta$  kontinuierlich an der Stelle  $l$  seien. Die Lösung kann mit Hilfe des Stokesschen Verfahrens durch Fourierintegrale dargestellt werden, die mit Hilfe des Cauchyschen Integrals ausgewertet werden. Zwei Fälle werden numerisch behandelt, nämlich daß kein Bodenstrom und daß keine Bodenreibung vorhanden sind. In beiden Fällen treten Vertikalbewegungen an der Küste und bei  $x = l$  auf. An der Stelle  $x = l$  ändert sich  $u$  kontinuierlich. Die Abweichungen dieser Lösung von der, die Ekman gegeben hatte, sind sehr gering und nur an der Küste und bei  $x = l$  wahrnehmbar. An der Küste verschwindet die Horizontalkomponente der Bewegung (vgl. vorst. Ref.).

B. Haurwitz.

**Smoliakow, P.: The theory of vertical streams in the atmosphere.** J. Geophys., Moskau **5**, 7—16 u. engl. Zusammenfassung 17 (1935) [Russisch].

The author pretends to derive for the speeds  $w$  of vertical streams the formula:  $w = t\sqrt{gAB_n(\theta - \theta^*)}$  with  $A, B_n = \text{const}$ ,  $\theta$  and  $\theta^* = \text{potential temperatures}$ . Some applications to a concrete example are given.

J. Kiebel (Leningrad).

**Lindinger, Eckart: Der parallaktische Winkel im astronomischen Dreieck als Bestimmungstück.** Allg. Vermessgs-Nachr. **47**, 281—289, 301—310 u. 324—330 (1935).